

WIESŁAW ŁUCZYŃSKI

WPLYW FILTRACJI NA PORTRETY FAZOWE I WYKŁADNIKI HURSTA INDEKSÓW GIEŁDOWYCH WIG I DJIA

Słowa kluczowe: filtr cyfrowy, analiza spektralna, dziwny atraktor, wymiar fraktalny

Keywords: digital filter, spectral analysis, strange attractor, fractal dimension

Klasyfikacja JEL: C22, G12

Wprowadzenie

W naukach technicznych filtry mają szerokie zastosowanie. Filtry techniczne są stosowane np. do filtracji wody, oleju, powietrza, gazów, itp. Filtry elektryczne i elektroniczne są wykorzystywane do zmniejszenia poziomu szumu (Dolby NR¹), wzmocnienia określonych częstotliwości i in.

Filtr matematyczny F jest operatorem transformacji (przetwarzania) danego (sygnału wejściowego) szeregu czasowego $\{y_i\}$ w inny (sygnał wyjściowy) szereg czasowy $\{z_i\}$. Transformacja taka nosi nazwę filtracji²: $\{y_i\} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \{z_i\}$.

W zasadzie wszelkie przekształcenia szeregów czasowych związane z ich (szeregów) analizą, prognozowaniem, modelowaniem, sterowaniem itp. można potraktować jako filtrację. Filtry cyfrowe znajdują zastosowanie m.in. w ekonomii do wygładzania szeregów czasowych, usuwania niepożądanych wahań (sezonowych, przypadkowych, wysoko- lub niskoczęstotliwościowych itp.), prognozowania i modelowania procesów ekonomicznych.

Szeroki spektr filtrów można podzielić według rozmaitych kryteriów: celu (analiza i wygładzanie, prognozowanie), działania (dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe i wszechprzepustowe, pasmowoprzepustowe i pasmowozaporowe), konstrukcji (liniowe i nielinio-we, symetryczne i asymetryczne, rekursywne i nierekursywne, niezmiennie w czasie, adaptacyjne) i in. Do oceny filtrów można zastosować w obszarze czasu funkcję autokorelacji

¹ *Dolby Noise Reduction* – system redukcji szumów opracowany przez firmę Dolby Laboratories i wykorzystywany w magnetofonach analogowych, zob. http://pl.wikipedia.org/wiki/Dolby_NR.

² Zob. H. Rinne, K. Specht: *Zeitreihen. Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose*, Verlag Franz Vahlen, München 2002, s. 108–122.

(ACF) lub autokorelacji cząstkowej (PACF). W obszarze częstotliwości natomiast – funkcję transformacji lub funkcję odpowiedzi częstotliwościowej³.

Metody badawcze

W niniejszym opracowaniu zostaną wykorzystane następujące filtry: Hodricka-Prescottta, Baxtera-Kinga, Butterwortha oraz Kalmana. Obliczenia wykonano z pomocą programu Gretl oraz (dla filtra Kalmana) programu R CRAN. Do oceny przesunięć w konstrukcji portretów fazowych wykorzystana została funkcja spektralna z wagami okna Bartletta (program Gretl). Dla szeregów oryginalnych oraz przefiltrowanych obliczone zostały wykładniki Hursta (program Gretl).

Celem opracowania jest próba oceny wpływu filtracji indeksów giełdowych na portrety fazowe ich składowych trendowych oraz cyklicznych. Badaniu poddane zostały: Warszawski Indeks Giełdowy (notowania dzienne od 16 kwietnia 1991 do 10 lipca 2012, liczba obserwacji $N = 4867$, symbol: wig) i Dow Jones Industrial Average (notowania dzienne od 17 lutego 1885 r. do 10 lipca 2012 r., liczba obserwacji $N = 35\ 060$, symbol: dja)⁴.

Filtry cyfrowe – wprowadzenie

Robert J. Hodrick i Edward C. Prescott w 1997 roku w znanym artykule *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*⁵ wykorzystali filtr Kalmana jako podstawę do skonstruowania własnego filtra Hodricka-Prescottta (HP filter). Zaproponowali oni procedurę dekompozycji szeregu czasowego y_t (GNP, inflacji, stopy bezrobocia) na wygładzony zmienny trend g_t (składową wzrostu) oraz składową cykliczną c_t (stacjonarną resztę):

$$y_t = g_t + c_t,$$

gdzie nieznana składowa trendu jest równa: $g_t = 2g_{t-1} - g_{t-2} + \varepsilon_t$.

Wygładzona składowa g_t wyznaczana jest tak, aby suma kwadratów jej drugiej różnicy z szeregiem y_t nie była zbyt duża. Zadanie optymalizacyjne zostało jako:

$$\text{Min} \left[\sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right]$$

ze względu na $\{g_t\}_{t=1}^T$.

³ Zob. *ibidem*, s.109; T.P. Zieliński: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*, WKiŁ, Warszawa 2007, s. 276; D. Stranneby: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Metody, algorytmy, zastosowania*, Wyd. BTC, Warszawa 2004, s. 132; Z. Wośko: *Czy filtry liniowe są przydatnymi narzędziami badania koniunktury? Analiza spektralna na przykładzie ankietowych wskaźników koniunktury*, s. 4, www.ae.katowice.pl/images/user/File/katedra_ekonomii/.

⁴ Dane uzyskane zostały z: www.measuringworth.com, www.indexmundi.com/commodities/?commodity=commodity-price-index&months=240 oraz <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=dji+historical+prices>.

⁵ R.J. Hodrick, E.C. Prescott: *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, s. 1–6, „Journal of Money, Credit and Banking” 1997, Vol. 29, No. 1, Ohio State University Press.

Miarą niezgodności c_t i ε_t jest w funkcji filtra HP 1, którą dla danych notowań dziennych WIG i DJIA przyjęliśmy⁶ $l = 400\ 000$. Filtr HP „przepuszcza” wahania o wyższych od wybranej (związanej z wyborem l) częstotliwościach, dlatego zaliczany jest do filtrów górnoprzepustowych. Filtr HP nie jest filtrem „idealnym”⁷ i jest krytykowany z uwagi na:

- wrażliwość na wydłużanie lub skracanie szeregu oraz na przekształcenia zmiennych⁸;
- statystyczną inferencję (po uprzedniej desezonalizacji danych pierwotnych) i generowanie cykli pozornych⁹;
- nieumiejętne stosowanie filtra HP może generować cykle pozorne także dla szeregów pozbawionych cykliczności¹⁰;
- pozorną korelację szeregów poddanych filtracji filtrem HP¹¹.

O ile filtr HP eliminuje trendy długofalowe, to filtr Baxtera-Kinga (BK) służy eliminacji trendu deterministycznego lub stochastycznego, wraz ze składową cykliczną¹². Według M. Baxtera i R.G. Kinga¹³, efektywna metoda detrendyzacji szeregów czasowych powinna spełniać następujące warunki:

- filtr powinien wyjawiać składowe cykliczne w pożądanym zakresie częstotliwości bez zakłócania ich charakterystyk,
- filtr nie powinien powodować przesunięć fazowych (i punktów zwrotnych) badanych szeregów,

⁶ T. Gopinath, A.K. Choudhary: *Countercyclical Capital Buffer Guidance for India*, RBI Working Paper Series (DEPR) 12/2012, <http://rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/12WPS210612.pdf>.

⁷ „Doskonały (idealny) filtr pasmowy (...) jest to filtr, którego funkcja przyrostu przyjmuje wartość 1 dla wszystkich częstotliwości z pożądanego pasma (...), zaś wartość 0 dla wszystkich pozostałych częstotliwości. Aby skonstruować filtr doskonały, przekształcany szereg musi mieć nieskończoną liczbę obserwacji” – Z. Wośko: *op.cit.*, s. 4.

⁸ V. Gomez: *The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series*, s. 365–373, „Journal of Business and Economic Statistics” 2001, Vol. 19, s. 368; R. Kaiser, A. Maraval: *Estimation of the Business Cycle: A Modified Hodrick-Prescott Filter*, s. 175–206, „Spanish Economic Review” 1999, Vol. 1, s. 175.

⁹ R. Kaiser, A. Maraval: *op.cit.*, s. 184.

¹⁰ K.R. Schenk-Hoppe: *Economic Growth and Business Cycles: A Critical Comment on Detrending Time Series*, s. 75–86, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 2001, Vol. 5, s. 83; T. Cogley, J.M. Nason: *Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series: implications for business cycle research*, s. 253–278, „Journal of Economic Dynamics and Control” 1995, Vol. 19; A. Guay, P. St-Amant: *Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King filters provide of good approximation of business cycles?*, Working Paper Center for Research on Economic Fluctuations and Employment (CEREFÉ) 1997, Vol. 53; D.R. Osborn: *Moving average detrending and the analysis of business cycles*, s. 547–558, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 1995, Vol. 57.

¹¹ A.C. Harvey, A. Jaeger: *Detrending, stylized facts and the business cycle*, „Journal of Econometrics” 1993, Vol. 8, s. 231–247.

¹² Zob. T. Kufel: *Narzędzia ekonometrii dynamicznej w oprogramowaniu Gretl*, IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe „Dynamiczne modele ekonometryczne” 6–8 września 2005 r. Toruń, Katedra Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, www.dem.umk.pl/DME/2005/34_kufel.pdf, s. 4.

¹³ M. Baxter, R.G. King: *Measuring business cycles. Approximate band-pass filters for economic time series*, NBER Working Paper Series 1995, No. 5022, s. 3.

- filtr powinien być możliwie najbardziej zbliżony do filtra „idealnego”,
- filtr powinien osłabiać składową trendową,
- uzyskana w procesie filtracji składowa cykliczna nie powinna zależeć od długości filtrowanego szeregu oraz
- metoda filtracji powinna być operatywna.

Stosownie do wymienionych postulatów zaproponowali oni cyfrowy filtr pasmowy (liniowy, skończony rzędu K , z symetrycznymi wagami i dwustronną średnią ruchomą)¹⁴ jako oszacowanie filtra „idealnego”. Pozwala on wyspecyfikować z badanego szeregu pożądaną pasmo (częstotliwości lub okresowości)¹⁵. W dziedzinie czasu filtr ten przekształca szereg wejściowy x_t jak średnia ruchoma, generując wyjściowy szereg y_t :

$$y_t = \sum_{j=-K}^K (a_j B^j x_{t+j}),$$

gdzie B jest operatorem przesunięcia ($B^j x_t = x_{t-j}$).

W dziedzinie częstościowej filtr jest opisywany transformatą Fouriera (spektrum) szeregu wejściowego i wyjściowego. Wartości B^j ustalane są w wyniku minimalizacji funkcji strat jako różnicy między filtrem idealnym $A(\omega)$ i filtrem zastosowanym $B(\omega)$:

$$\min(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega) - B(\omega)|^2 d\omega, B(0) = 0$$

i gdzie $A(\omega)$ to funkcja transferowa filtra „idealnego”, zaś $B(\omega)$ – filtra zastosowanego¹⁶.

Filtr Baxtera-Kinga, podobnie jak inne cyfrowe filtry pasmowe, jest krytykowany za to, że nie izoluje wzajemnie cykli szeregów z zintegrowaną składową trendową. Pierwsze różnice są „przepuszczane” przez filtr BK, w wyniku czego spektrum przefiltrowanego szeregu zależy od trendu nieprzefiltrowanego szeregu pierwotnego¹⁷. Ponadto, gdy spektrum pierwotnego szeregu wykazuje maksimum dla zerowej częstotliwości, filtr BK (podobnie jak i filtr HP) wykazuje istnienie, pozornej w istocie, cykliczności¹⁸. R.G. King i M. Watson¹⁹ uznali to za „typowy przebieg spektralny stóp wzrostu”. Symetryczność filtra BK wyklucza wyekstrahowanie pasm częstości z początku i z końca pierwotnego szeregu

¹⁴ M. Baxter: *Real exchange rates and real interest differentials: Have we missed the business-cycle relationship*, s. 5–37, „Journal of Monetary Economics” 1994, Vol. 33; M. Baxter, R.G. King: *op.cit.*; J.H. Stock, M.W. Watson: *Business cycle fluctuations in US macroeconomic time series*, NBER Working Paper Series 1998, No. 6528.

¹⁵ Z. Wośko, *op.cit.*, s. 6.

¹⁶ Por. *Ibidem*, s. 6–7; U. Woitek: *A Note on the Baxter-King Filter*, <https://dspace.gla.ac.uk/bitstream/1905/593/1/9813.pdf>, s. 3.

¹⁷ Zob. Ch.J. Murray: *Cyclical Properties of Baxter-King Filtered Series*, <http://userwww.service.emory.edu/~zliu5/seminars/murray.pdf>, s. 1.

¹⁸ Zob. A. Guay, P. St-Amant, *op.cit.*, s. 16–17.

¹⁹ R.G. King, M. Watson: *Money, Prices, Interest Rates and the Business-Cycle*, „Review of Economics and Statistics”, www.princeton.edu/~mwatson/papers/King_Watson_ReStat_1996.pdf, s. 35–53.

czasowego; jego symetryczność nie gwarantuje też braku przesunięć fazowych w przefiltrowanym szeregu²⁰. Filtr BK może, podobnie jak i filtr HP, generować cykle pozorne²¹.

Filtry cyfrowe Butterwortha należą do klasy filtrów cyfrowych o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR – *Infinite Impulse Response*). Zaletą cyfrowych filtrów NOI/IIR jest m.in. to, że „układ lub algorytm realizujący filtrację jest „prostszy” oraz, że w procesie projektowania cyfrowych filtrów NOI/IIR „wykorzystuje się wiedzę o filtrach analogowych”²². Natomiast wadą tych filtrów jest to, że w pewnych warunkach odpowiedź impulsowa „może zawierać nieskończoną liczbę próbek”²³ i może być niestabilna. Ponadto projektant cyfrowych filtrów NOI/IIR „zwykle nie ma wpływu na kształt charakterystyki fazowej filtrów NOI”²⁴. Schemat blokowy filtra cyfrowego dla rzędu opóźnień $N = 3$ z linią opóźnienia tylko na wyjściu (blok z^{-1} oznacza układ opóźniający sygnał wejściowy o jedną obserwację) został przedstawiony na poniższym schemacie. Zaprezentowany układ dyskretny realizuje zależność:

$$y(n) = x(n) - \sum_{j=1}^N a_j y(n-j).$$

Filtr Butterwortha jest filtrem dolnoprzepustowym rzędu N . Najistotniejsze w idealnych filtrach dolnoprzepustowych jest odtworzenie charakterystyki amplitudowej sygnału, bez zwracania większej uwagi na charakterystykę fazową. Filtry te znajdują zastosowanie m.in. do obróbki sygnałów akustycznych. Ludzki narząd słuchu nie odróżnia np. sygnałów różniących się tylko widmem fazowym. Wraz ze wzrostem rzędu, charakterystyka amplitudowa filtra Butterwortha zbliża się do charakterystyki amplitudowej idealnego filtra dolnoprzepustowego²⁵.

Filtr Kalmana²⁶ (od nazwiska R.E. Kalmana) jako rekursywny, liniowy, adaptacyjny (a ponadto dyskretny, zmienny w czasie oraz mający skończoną wymiarowość) filtr miał początkowo zastosowania techniczne i stopniowo został zaadoptowany do ekonometrii

²⁰ G. Buss: *Asymmetric Baxter-King filter*, „Scientific Journal of Riga Technical University” 2010, Vol. 42, s. 95.

²¹ U. Woitek, *op.cit.*, s. 3.

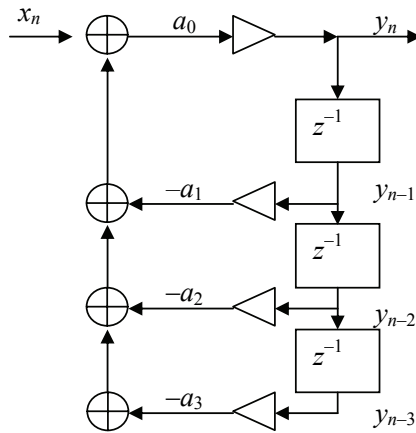
²² J. Izydorczyk, G. Płonka, G. Tyma: *Teoria sygnałów*, Helion, Gliwice 2006, s. 279.

²³ *Ibidem*.

²⁴ *Ibidem*.

²⁵ J. Izydorczyk, G. Płonka, G. Tyma, *op.cit.*, s. 108–110.

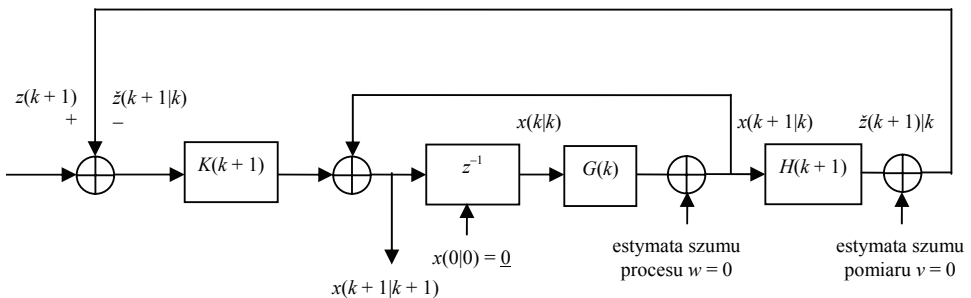
²⁶ Zob. T.P. Ziełiński, *op.cit.*, s. 408–419; D. Stranneby, *op.cit.*, s. 134–150; R. Kleinbauer: *Kalman Filtering Implementation with Matlab*, Study Report in the Field of Study Geodesy and Geoinformatics at Universität Stuttgart, Helsinki, November 2004, s. 5–17; Ch. Chatfield: *Time-Series Forecasting*, Chapman & Hall/CRC, London, New York 2000, s. 92–93; G.K. Pasricha: *Kalman Filter and its Economic Applications*, University of California, Santa Cruz, 15 October 2006, http://mpira.ub.uni-muenchen.de/22734/1/MPRA_paper_22734.pdf; A.C. Harvey: *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, s. 104–112; Ch. Tandon, A. Khursheet, N. Gupta: *Kalman Filter and its Applications*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken 2010, s. 10–24; *Kalman Filtering and Neural Networks*, red. S. Haykin, John Wiley & Sons, Toronto 2001, s. 5–20; S. Haykin: *Neural Networks and Learning Machines*, Pearson Education, New Jersey 2009, s. 732–777; Z. Weng: *An R Package for Continuous Time Autoregressive Models via Kalman Filter*, <http://cran.r-project.org/web/packages/cts/vignettes/kf.pdf>.



Rysunek 1. Schemat blokowy filtra cyfrowego („tylko” NOI/IIR, AR – *Autoregressive*) dla $N = 3$ z linią opóźniającą tylko na wyjściu

Źródło: opracowanie własne na podstawie T.P. Zieliński: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*, WKiŁ, Warszawa 2007, s. 264.

i statystyki. Filtr ten filtruje szeregi czasowe (sygnały) w oparciu raczej o ich własności statystyczne niż spektralne. Filtr Kalmana w modelach przestrzeni stanów dla szeregów czasowych pełni analogiczną rolę, jaką ma metoda najmniejszych kwadratów w modelach regresji. Standardowa filtracja z pomocą rekursywnej, adaptacyjnej estymacji zakładanego (nieobserwowalnego) wektora x na podstawie obserwacji z i zakłóceń pomiarowych v sprowadza się do minimalizacji błędu sumy kwadratów, związanego z błędem (szumem) estymaty wektora x : $z = Hx + v$, gdzie na wektor x składa się N zmiennych, a na wektor z – M zmiennych. Stąd, jakość oszacowania (estymacji) wektora x oceniana jest jako $Min(\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 + \dots + \hat{v}_M^2) = Min \sum_{i=1}^M \hat{v}_i^2$. Sytuacja pomiarowa w przypadku filtra Kalmana jest



Rysunek 2. Schemat blokowy filtra Kalmana

Źródło: opracowanie własne na podstawie T.P. Zieliński, *op.cit.*, s. 410.

inna, minimalizowana jest bowiem wartość oczekiwana funkcji jakości estymacji (estymata wariancji): $Min \left\{ E \left[(x - \hat{x})^T \cdot (x - \hat{x}) \right] \right\}$. Nie jest to, jak w przypadku estymacji RLS (*Recursive Least Squares* – ang.), suma kwadratów błędów (szumów) pomiaru. Poniższy schemat blokowy ilustruje procedurę estymacji filtra Kalmana.

Matematyczna strona sytuacji pomiarowej filtra Kalmana (estymacja minimalno-średniokwadratowa, MMS, *Minimum Mean Squares*) jest także inna niż filtra RLS:

$$\begin{cases} x(k+1) = F(k) \cdot x(k) + w(k) \leftarrow \text{model procesu} \\ z(k+1) = H(k+1) \cdot x(k+1) + v(k+1) \leftarrow \text{model pomiaru} \end{cases}$$

Pierwsze z dwóch równań opisuje obserwacje procesu, natomiast drugie równanie opisuje dokonany na danym procesie pomiar. Algorytm filtra Kalmana można w sposób uproszczony przedstawić w następujących punktach²⁷:

- 1 – poprzednia estymata stanu procesu,
- 2 – prognoza nowego stanu,
- 3 – prognoza nowego pomiaru,
- 4 – nowy pomiar,
- 5 – błąd prognozy pomiaru,
- 6 – korekta estymaty stanu,
- 7 – powrót do punktu 1.

W przypadku filtra Kalmana (*FK*), gdy szum ma charakter gaussowski, dowodzi się, że filtr Kalmana jest najlepszym filtrem. Gdy szum jest niegaussowski – *FK* jest najlepszym filtrem liniowym. Nawet, gdy *FK* jest stały w czasie, szum zaś stacjonarny – *FK* jest zmienny w czasie (cecha filtrów adaptacyjnych).

W ekonomii filtry Kalmana znajdują zastosowanie w wygładzaniu i filtrowaniu przebiegów czasowych, prognozowaniu, w modelowaniu nieliniowym, estymacji parametrów modeli ARMA, w uogólnionej metodzie najmniejszych kwadratów (*GLS* – *generalised least squares method*) oraz identyfikacji układów liniowych, w sztucznych sieciach neuronowych, w synchronizacji układów chaotycznych²⁸ i in.

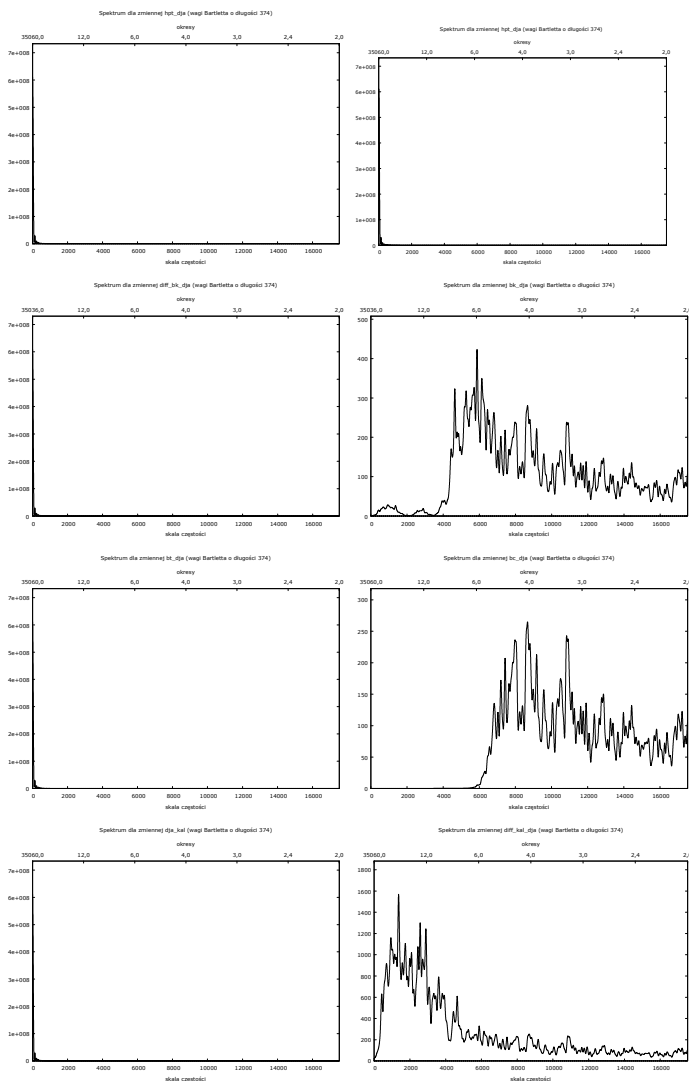
Problemem kluczowym w filtrowaniu ekonomicznych szeregów czasowych jest to, że w większości przypadków nie można w sposób nie budzący wątpliwości ustalić typu ich stacjonarności. A to powoduje, że nie można zastosować „poprawnej” *a priori* metody filtracji. Możliwym w danej sytuacji rozwiązaniem wydaje się ocena efektywności filtracji poprzez zastosowanie dużej ilości różnych filtrów i porównanie ich działania.

²⁷ Zob. T.P. Zieliński, *op.cit.*, s. 411.

²⁸ Zob. S. Puthusserypady, A.P.Kurian: *Variants of Kalman Filter for the Synchronization of Chaotic Systems*, s. 209–224 [w:] *Kalman Filter*, red. V. Kordić, May 2010, INTECH, Croatia, downloaded from SCIYO.COM.

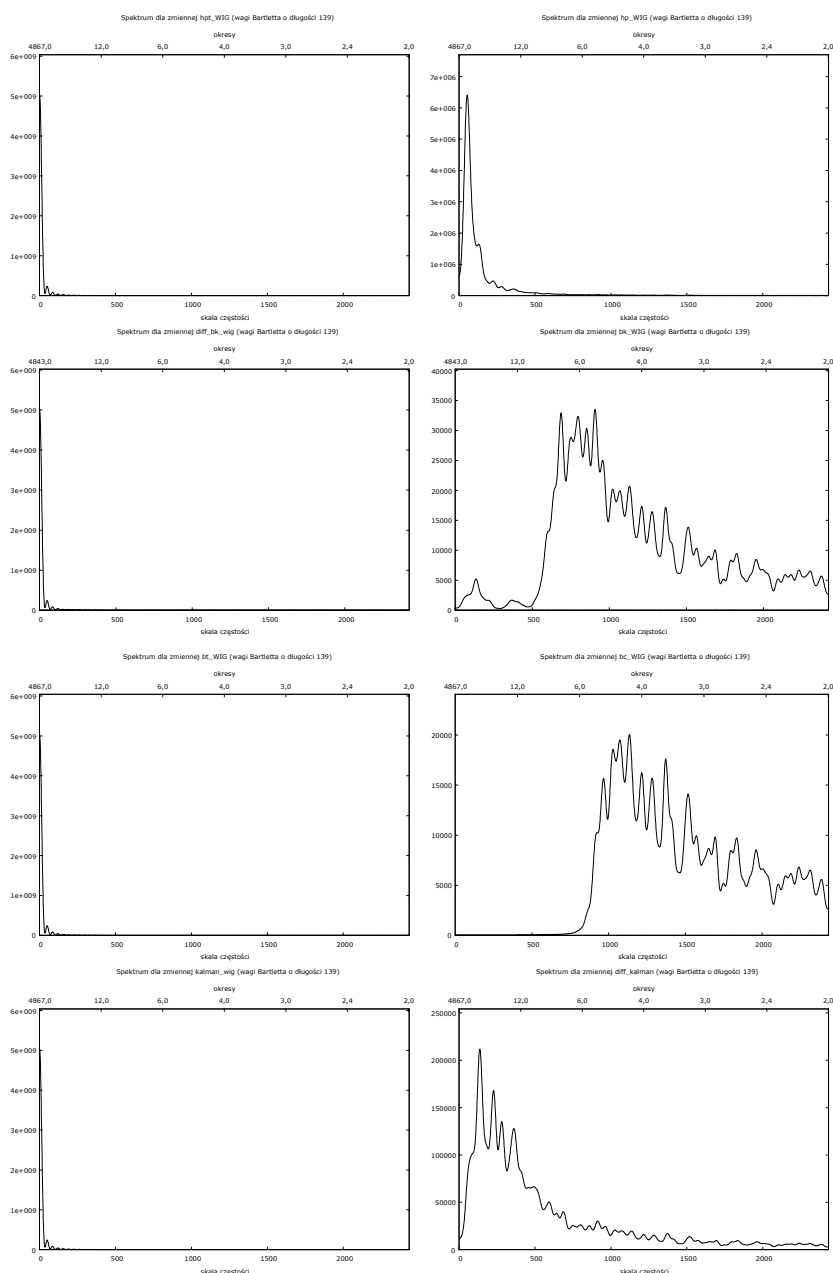
Analiza empiryczna

Funkcje gęstości spektralnej indeksów giełdowych DJIA i WIG dla danych oryginalnych i przefiltrowanych zawierają wykresy na poniższych rysunkach. Na ich podstawie zostały ustalone wielkości przesunięć dla portretów fazowych tych indeksów.



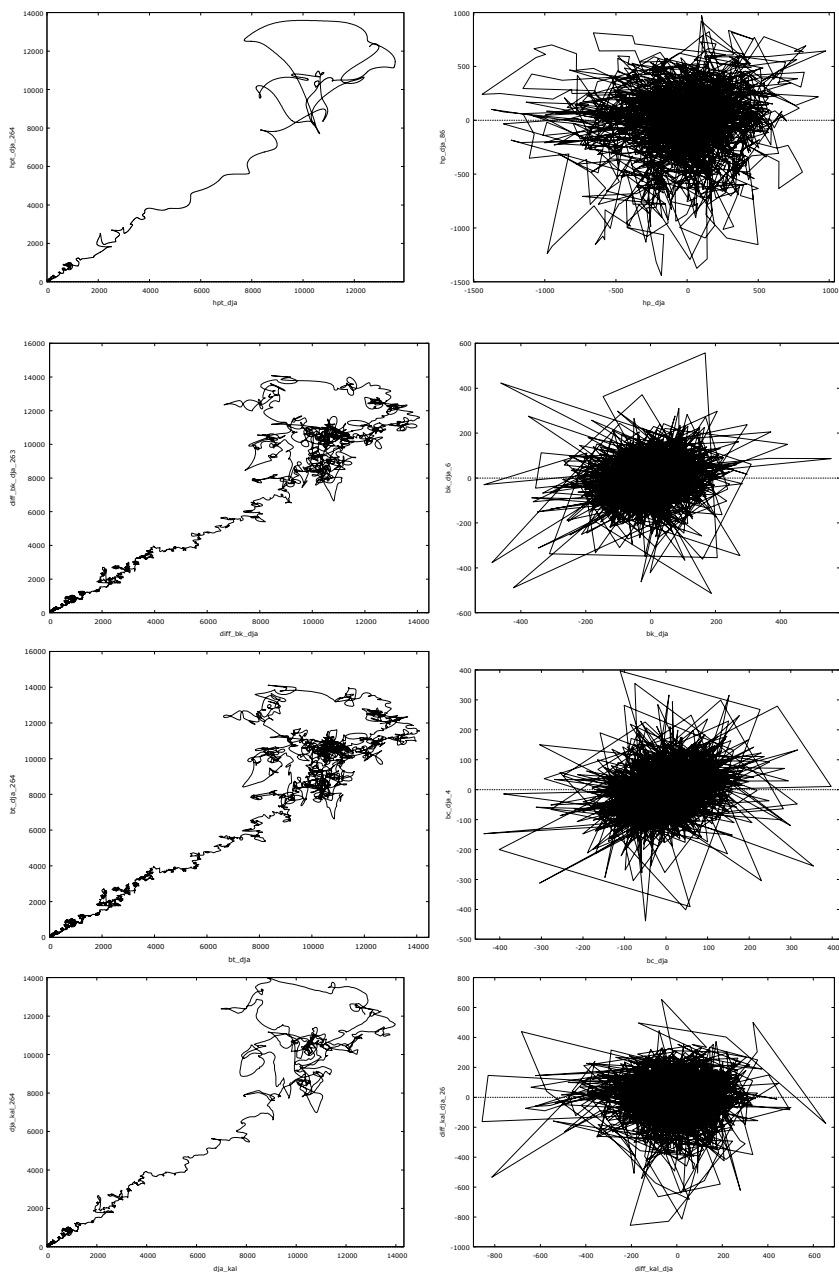
Rysunek 3. Funkcje gęstości spektralnej (wagi Bartletta o długości 374) przefiltrowanych danych indeksu giełdowego DJIA (składowa trendowa – lewy wykres, składowa cykliczna – prawy wykres) filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.



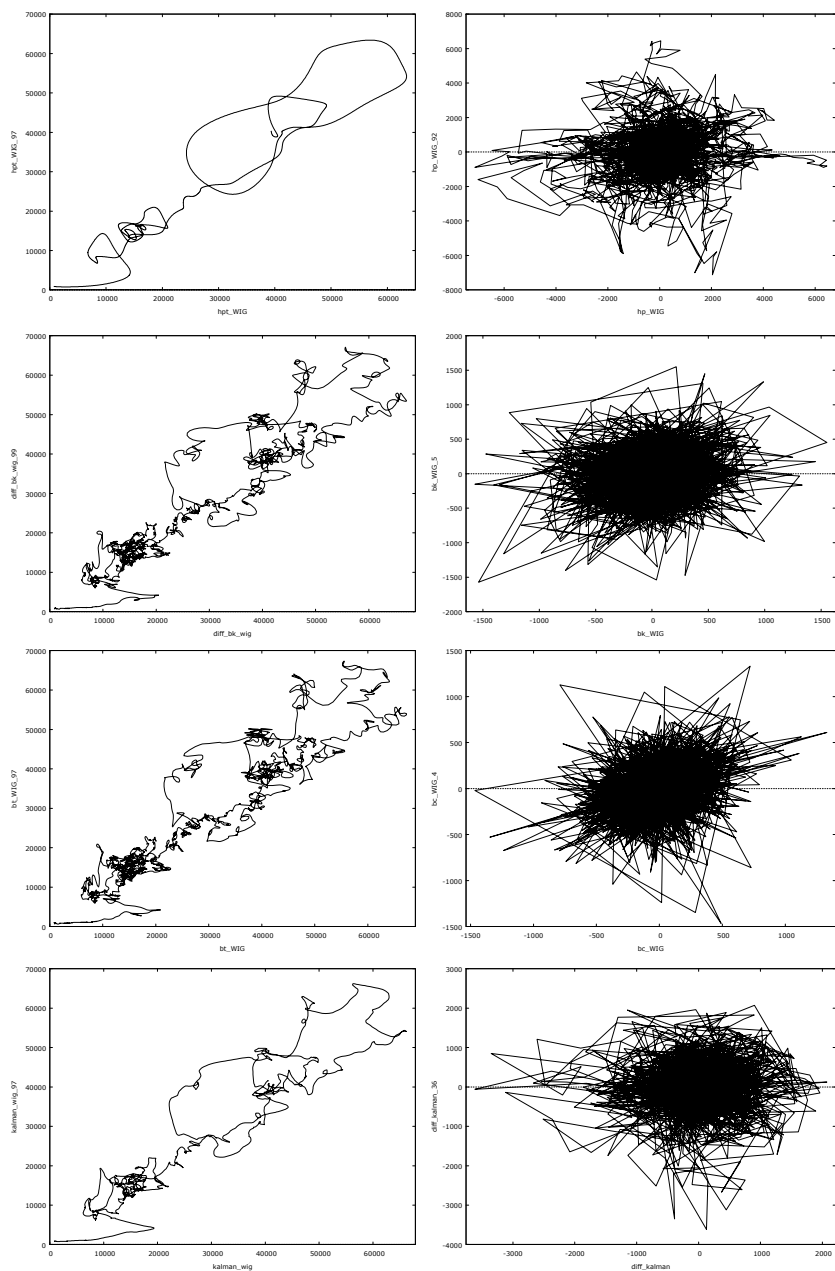
Rysunek 4. Funkcje gęstości spektralnej (wagi Bartletta o długości 139) przefiltrowanych danych indeksu giełdowego WIG (składowa trendowa – lewy wykres, składowa cykliczna – prawy wykres) filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.



Rysunek 5. Portrety fazowe przefiltrowanych indeksów DJIA dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.



Rysunek 6. Portrety fazowe przefiltrowanych indeksów WIG dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

Analiza spektralna przefiltrowanych szeregów wykazała dla składowych trendowych cykle o okresach 264 obserwacji DJIA i 97 obserwacji WIG. W przypadku składowych cyklicznych, spektrum wyraźnie przesunęło się w kierunku wyższych częstości (o okresach 86, 26, 6 i 4 obserwacji DJIA oraz 92, 36, 5 i 4 obserwacji WIG). Filtr Kalmana i, w większym jeszcze stopniu, filtr HP tłumią częstości składowe (wysokie dla filtracji trendowej i niskie dla filtracji składowej cyklicznej).

Portrety fazowe indeksów giełdowych DJIA oraz WIG zostały przedstawione poniżej. O ile „igły” dominujących częstości składowych trendowych są, w porównaniu z częstościami składowych cyklicznych, słabo zaznaczone, to ich portrety fazowe wydają się bardziej regularne; w przypadku składowej cyklicznej portrety fazowe przypominają chaotyczne, dziwne atraktory. Uzyskane wyniki analizy spektralnej i wartości wykładników Hursta zostaną przedstawione w formie tabelarycznej.

Zestawienie zbiorcze badanych szeregów zawiera tabela 1.

Tabela 1

Okresy dominujących wahań oraz wykładniki Hursta dla nieprzefiltrowanych i dla przefiltrowanych szeregów czasowych (finansowych, realnych i koniunkturalnych)

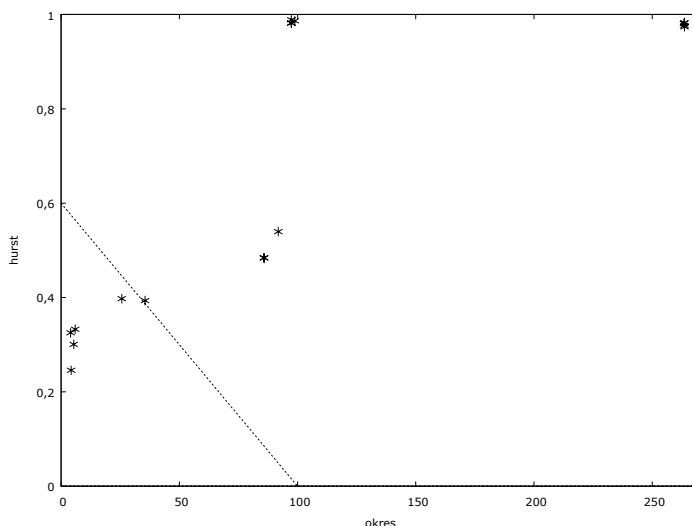
Szereg czasowy	Okres wahań – dane niefiltrowane (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej trendowej (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej cyklicznej (wykładnik Hursta)
wig	97,4 (0,995706)		
Hodrick-Prescott		97,34 (0,982157)	91,83 * (0,539712)
Baxter-King		98,84 (0,986443)	5,34 * (0,300565)
Butterworth		97,34 (0,988699)	4,28 * (0,245548)
Kalman		97,34 (0,981764)	35,53 * (0,393447)
dja	263,61 (0,988298)		
Hodrick-Prescott		263,61 (0,974019)	85,93; 85,72 * (0,483903)
Baxter-King		263,43 (0,980929)	5,97 * (0,332742)
Butterworth		263,61(0,982862)	4,03 * (0,325076)
Kalman		263,61 (0,976817)	25,65 * (0,397414)

* oznacza wyraźnie zaznaczoną w przebiegu funkcji gęstości spektralnej – „igłę”

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl na podstawie danych ze stron internetowych²⁹.

Uzyskane wyniki pozwalają na sformułowanie odwrotnej zależności między wykładnikiem Hursta i występowaniem dominujących częstości w badanych szeregach indeksów giełdowych: wraz ze wzrostem wykładnika Hursta (lub ze zmniejszaniem się wymiaru fraktalnego) zanika wyraźna struktura harmoniczna. Przeprowadzone symulacje z filtracją danych szeregów czasowych potwierdzają tezę, że regularność przebiegów cyklicznych

²⁹ www.measuringworth.com; <http://finance.yahoo.com>.



Rysunek 7. Wykres rozrzutu okresów składowych trendowych i cyklicznych oraz wykładników Hursta

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

cechuje raczej układy antypersystentne, powracające do wartości średnich. W układach wzmacniających trendy (persystentnych) wyraźna regularność występuje rzadko. Portrety fazowe uzyskane w wyniku filtracji Hodricka-Prescotta i Kalmana są najbliższe portretom fazowym cyklu granicznego, charakterystycznego dla układów oscylujących wokół pewnego stanu równowagi. Przeprowadzone badanie wskazuje, że badane szeregi czasowe są cyklami nieokresowymi, tzn. nie mają ściśle określonej skali czasowej i długości³⁰. Zastosowanie procedury filtracji pozwala wyjawiać okresową, regularną naturę danych szeregów czasowych. Najbardziej efektywne wydaje się zastosowanie filtra Hodricka-Prescotta i filtra Kalmana.

Literatura

Baxter M., King R.G.: *Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*, NBER, „Working Papers” Feb. 1995, No. 5022.

Baxter M.: *Real exchange rates and real interest differentials: Have we missed the business-cycle relationship*, „Journal of Monetary Economics” 1994, Vol. 33.

Buss G.: *Asymmetric Baxter-King filter*, „Scientific Journal of Riga Technical University” 2010, Vol. 42.

³⁰ Zob. E.E. Peters, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997, s. 138–140.

- Chatfield Ch.: *Time-Series Forecasting*, Chapman & Hall/CRC, London, New York 2000.
- Cogley T., Nason J.M.: *Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series: Implications for business cycle research*, „Journal of Economic Dynamics and Control” 1995, Vol. 19.
- Gomez V.: *The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series*, „Journal of Business and Economic Statistics” 2001, Vol.19.
- Gopinath T., Choudhary A.K.: *Countercyclical Capital Buffer Guidance for India*, RBI Working Paper Series (DEPR) 12/2012, <http://rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/12WPS210612.pdf>.
- Guay A., St-Amant P.: *Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King filters provide of good approximation of business cycles?*, Working Paper Center for Research on Economic Fluctuations and Employment (CEREFÉ) 1997, Vol. 53.
- Harvey A.C., Jaeger A.: *Detrending, stylized facts and the business cycle*, „Journal of Econometrics” 1993, Vol. 8.
- Harvey A.C.: *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- Haykin S.: *Neural Networks and Learning Machines*, Pearson Education, New Jersey 2009.
- Hodrick R.J., Prescott E.C.: *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, „Journal of Money, Credit and Banking” Feb. 1997, Vol. 29, No. 1, Ohio State University Press. <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=^dji+historical+proces>.
- Izydorczyk J., Płonka G., Tyma G.: *Teoria sygnałów*, Helion, Gliwice 2006.
- Kaiser R., Maraval A.: *Estimation of the Business Cycle: A Modified Hodrick-Prescott Filter*, „Spanish Economic Review” 1999, Vol. 1.
- Kalman Filtering and Neural Networks*, red. S. Haykin, John Wiley & Sons, Toronto 2001.
- King R.G., Watson M.: *Money, Prices, Interest Rates and the Business-Cycle*, „Review of Economics and Statistics” Feb. 1996, MIT Press, Vol. 78 (1).
- Kleinbauer R.: *Kalman Filtering Implementation with Matlab*, Study Report in the Field of Study Geodesy and Geoinformatics at Universität Stuttgart, Helsinki, November 2004.
- Kufel T.: *Narzędzia ekonometrii dynamicznej w oprogramowaniu Gretl*, IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe „Dynamiczne modele ekonometryczne” 6–8 września 2005 r. Toruń, Katedra Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, www.dem.umk.pl/DME/2005/34_kufel.pdf.
- Murray Ch.J.: *Cyclical Properties of Baxter-King Filtered Series*, <http://userwww.service.emory.edu/~zliu5/seminars/murray.pdf>.
- Osborn D.R.: *Moving average detrending and the analysis of business cycles*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 1995, Vol. 57.
- Pasricha G.K.: *Kalman Filter and its Economic Applications*, University of California, Santa Cruz, 15 October 2006, http://mpr.ub.uni-muenchen.de/22734/1/MPRA_paper_22734.pdf.
- Peters E.E.: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.

- Puthuserrypady S., Kurian A.P.: *Variants of Kalman Filter for the Synchronization of Chaotic Systems*, [w:] *Kalman Filter*, red. V. Kordić, INTECH, Croatia 2010, SCIYO.COM.
- Ravn M.O., Uhlig H.: *On adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the frequency of observation*, „The Review of Economics and Statistics” 2002, Vol.84, University College London.
- Rinne H., Specht K.: *Zeitreihen. Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose*, Verlag Franz Vahlen, München 2002.
- Schenk-Hoppe K.R.: *Economic Growth and Business Cycles: A Critical Comment on Detrending Time Series*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 2001, Vol. 5.
- Stock J.H., Watson M.W.: *Business cycle fluctuations in US macroeconomic time series*, NBER Working Paper Series 1998, No. 6528.
- Stranneby D.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Metody, algorytmy, zastosowania*, BTC, Warszawa 2004.
- Tandon Ch., Khursheet A, Gupta N.: *Kalman Filter and its Applications*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saabrücken 2010.
- Weng Z.: *An R Package for Continuous Time Autoregressive Models via Kaman Filter*, <http://cran.r-project.org/web/packages/cts/vignettes/kf.pdf>.
- Woitek U.: *A note on the Baxter-King Filter*, <https://dspace.gla.ac.uk/bitstream/1905/593/1/9813.pdf>.
- Wośko Z.: *Czy filtry liniowe są przydatnymi narzędziami badania koniunktury? Analiza spektralna na przykładzie ankietowych wskaźników koniunktury*, www.ae.katowice.pl/images/user/File/katedra_ekonomii/.
- www.indexmundi.com/commdities/?commodity=commodity-price-index&months=240.
- www.measuringworth.com.
- Zieliński T.P.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*, WKiŁ, Warszawa 2007.

dr hab. Wiesław Łuczyński
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Gospodarki Międzynarodowej
Katedra Finansów Międzynarodowych

Streszczenie

Celem opracowania jest próba oceny wpływu filtracji ekonomicznych szeregów czasowych na portrety fazowe ich składowych trendowych oraz cyklicznych. W zasadzie wszelkie przekształcenia szeregów czasowych związane z ich (szeregów) analizą, prognozowaniem, modelowaniem, sterowaniem itp. można potraktować jako filtrację. Filtry cyfrowe znajdują zastosowanie m.in. w ekonomii do wygładzania szeregów czasowych, usuwania niepożądanych wahań (sezonowych, przypadkowych, wysoko- lub niskoczęstościowych itp.), prognozowania i modelowania procesów ekonomicznych.

Uzyskane wyniki pozwalają na sformułowanie odwrotnej zależności między wykładnikiem Hursta i występowaniem dominujących częstości we wszystkich badanych szeregach: wraz ze wzrostem wykładnika Hursta (lub ze zmniejszaniem się wymiaru fraktalnego) zanika wyraźna struktura

harmoniczna. Przeprowadzone symulacje z filtracją szeregów czasowych potwierdzają tezę, że regularność przebiegów cyklicznych cechuje raczej układy antypersystentne, powracające do wartości średnich. W układach wzmacniających trendy (persystentnych) wyraźna regularność występuje rzadko. Portrety fazowe uzyskane w wyniku filtracji Hodricka-Prescotta i Kalmana są najbliższe portretom fazowym cyklu granicznego, charakterystycznego dla układów oscylujących wokół pewnego stanu równowagi. Przeprowadzone badanie wskazuje, że ekonomiczne szeregi czasowe są cyklami nieokresowymi, tzn. nie mają ściśle określonej skali czasowej i długości. Zastosowanie procedury filtracji pozwala wyjawić okresową, regularną naturę ekonomicznych szeregów czasowych. Najbardziej efektywne wydaje się zastosowanie filtra Hodricka-Prescotta i filtra Kalmana.

THE INFLUENCE OF THE FILTRATION ON PHASE PORTRAITS AND HURST EXPONENTS OF THE WIG AND DJIA STOCK INDICES

Summary

The aim of this paper is to attempt to assess the impact of filtering the economic time series on their components' trending and cyclical phase portraits. In principle all transformations of time series tied with its analysis, forecasting, modelling, control, etc. can be considered filtration. Digital filters are applied, among others, in economics for smoothing time series, removing undesirable variations (seasonal, accidental, high or low frequency fluctuations and more), forecasting and the modelling of economic processes.

Achieved results allow for formulating the inverse relationship between the Hurst exponent and appearance of dominating frequencies in all examined series: with an increase of the Hurst exponent (or with a reduction of fractal dimension) the harmonic structure is fading out. Simulations made with the filtration of time series confirmed the thesis that the regularity of cyclical courses is characteristic rather for antipersistent systems (returning to average values). In the systems amplifying trends (persistent systems) the distinct regularity rarely appears. Phase portraits got as a result of the Hodrick-Prescott and Kalman filtrations are closest to phase portraits of the limited cycle, which are characteristic of systems fluctuating around a certain steady-state. The conducted examination shows that economic time series are nonperiodic cycles, i.e. don't have a closely determined temporary scale and length. Applying the procedure of filtration allows for revealing the periodic, regular nature of economic time series. Applying the Hodricka-Prescott filter and Kalman filter seems most effective.