

*KAMILA BEDNARZ*

Uniwersytet Szczeciński

**MODELOWANIE ROZKŁADU TYGODNIOWYCH STÓP ZWROTU  
SPÓŁEK WCHODZĄCYCH W SKŁAD INDEKSU WIG20  
ZA POMOCĄ ROZKŁADU LAPLACE’A I GAUSSA  
WPŁYW WARTOŚCI KONCENTRACJI NA WYNIK TESTU ZGODNOŚCI  
DLA ROZKŁADU NORMALNEGO**

**Streszczenie**

W pracy rozpatrzono wykorzystanie rozkładu Laplace’a i rozkładu Gaussa do modelowania rozkładu tygodniowych stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20. Jako jedno z kryteriów przydatności rozkładu do modelowania przyjęto maksymalny okres obserwacji zapewniający pozytywne wyniki testu zgodności. Stwierdzono, że dane tygodniowe poprawiły jakość modelowania w stosunku do danych dziennych wyrażającą się dłuższym okresem przydatności obydwu rozkładów. Ponadto zwrócono uwagę na interesującą prawidłowość występującą dla rozkładu normalnego, która wyraża się istotnym związkiem pomiędzy zmianą wartości koncentracji a wynikiem testu zgodności rozkładu.

**Słowa kluczowe:** stopa zwrotu, rozkład Gaussa, rozkład Laplace’a

**Wprowadzenie**

Zagadnienie modelowania rozkładu empirycznych stóp zwrotu z akcji notowanych na GPW w Warszawie ma bogatą bibliografię. Jedną z pierwszych była praca Krzysztofa Jajugi [2000], w której zaprezentowano wyniki badań szeregów czasowych stóp zwrotu z 33 akcji i dwóch indeksów dla notowań dziennych, tygodniowych i miesięcznych w okresie od 26 października 1994 do 31 stycznia

2000 roku. W przypadku danych dziennych należało odrzucić hipotezę o zgodności rozkładu danych empirycznych z rozkładem normalnym. Dla danych tygodniowych i miesięcznych sytuacja nie przedstawiała się już tak jednoznacznie, dla części danych nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładów. Autor pracy zasugerował prowadzenie badań wykorzystujących rozkłady stabilne. W pracy Bołta i Miłobędzkiego [1994] zamieszczono wyniki dotyczące badania stóp zwrotu indeksu WIG oraz 21 akcji notowanych na GPW w Warszawie w latach 1991–1993. Dla większości przypadków stwierdzono niezgodność rozkładów empirycznych z rozkładem Gaussa. Tarczyński i Mojsiewicz [2001] analizowali tygodniowe stopy zwrotu z indeksu WIG w okresie od kwietnia 1991 do grudnia 2000 roku, w wyniku czego odrzucono hipotezę o normalności rozkładów. Zbliżone wyniki zawiera praca Osińskiej [2006], w której badano rozkłady stóp zwrotu z indeksów WIG i WIG20 oraz 18 akcji spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 w okresie od stycznia 1991 do lipca 2001 roku. W przypadku danych dziennych stwierdzono niezgodność z rozkładem Gaussa dla wszystkich szeregów czasowych. Dla danych tygodniowych tylko jeden szereg czasowy wykazał zgodność z rozkładem normalnym. Analogiczne wnioski wyciągnięto w pracy Witkowskiej i Kompy [2007], w której dla wszystkich rozpatrzonych szeregów czasowych (dziennie stopy zwrotu z 12 spółek i 2 indeksów notowanych na GPW w okresie 2 stycznia 2002 – 31 grudnia 2005 roku) należało odrzucić hipotezę o normalności rozkładów.

Inną grupę stanowią prace, w których rozpatruje się przydatność rozkładów teoretycznych do modelowania rozkładów empirycznych. Ze względu na ograniczoną objętość pracy zostanie omówiona tylko jedna pozycja [Piasecki, Tomasiak 2011], w której rozpatrzono aproksymację empirycznych szeregów stóp zwrotu z indeksu WIG20 z wykorzystaniem rozkładów teoretycznych: Gaussa, t-Studenta, stabilnego, GH, hiperbolicznego, NIG, rozkładu GH t-Studenta oraz GED. Najlepsze dopasowanie do danych empirycznych wykazały rozkłady należące do klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych.

Na podstawie rozpatrzonej literatury można zauważyć, że autorzy, kwestionując normalność rozkładu empirycznych stóp zwrotu, proponują aproksymację z wykorzystaniem stosunkowo złożonych rozkładów teoretycznych. Należy zauważyć, że dla wymienionych powyżej ośmiu rozkładów teoretycznych żaden z nich nie ma dystrybuanty wyrażającej się wzorem analitycznym. Wady tej nie ma rozkład Laplace'a, w którym dystrybuanta wyraża się prostym wzorem [Kotz, Kozubowski, Podgórski 2001]. Uwzględniając powyższe, autorka pracy sugeruje

aproxymację empirycznych rozkładów stóp zwrotu z wykorzystaniem rozkładu Laplace'a jako alternatywę dla rozkładu normalnego.

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację badań i rozwinięcie problematyki przedstawionej w artykule autorki [Bednarz 2012], w którym zaprezentowano wyniki modelowania rozkładu dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20 i spółek wchodzących w jego skład za pomocą rozkładu Laplace'a i rozkładu Gaussa. Jednym z rozpatrzonych problemów był wybór wzoru służącego do oszacowania parametrów rozkładu. Wykorzystując rozkład Laplace'a do modelowania rozkładu stóp zwrotu, wyznaczano parametry dwiema metodami: metodą momentów oraz MNW, a następnie wyznaczano wartości statystyki testu chi-kwadrat [Kotz i in. 2001]. W wyniku obliczeń stwierdzono, że metoda momentów prowadziła do większych wartości unormowanej statystyki niż metoda największej wiarygodności. Ponadto test chi-kwadrat okazał się bardziej „wymagający” przy określeniu maksymalnego okresu przydatności rozkładu do modelowania niż test Kołmogorowa i w związku z tym autorka zaleciła stosowanie testu chi-kwadrat z pominięciem testu Kołmogorowa. Dodatkowo porównano wyniki testu chi-kwadrat wykonanego dla różnej postaci przedziałów klasowych. Uwzględniono przedziały klasowe zapewniające jednakową liczebność teoretyczną i przedziały o jednakowej długości [Tarczyński 2001]. W tym ostatnim przypadku rozpatrzono dwie metody wyznaczania liczebności teoretycznej: według dystrybuanty oraz na podstawie wartości gęstości rozkładu w środku przedziału klasowego. W rezultacie przeprowadzonych badań autorka artykułu zaleciła wyznaczanie liczebności teoretycznej na podstawie dystrybuanty – mniejsza wartość statystyki w porównaniu z metodą opartą na wartości gęstości rozkładu.

Celem niniejszego artykułu było rozszerzenie powyższych badań o dane tygodniowe w celu zbadania ich przydatności do modelowania rozkładu stóp zwrotu indeksu WIG20 oraz spółek wchodzących w jego skład, a także analiza wpływu danych tygodniowych na wyniki testów zgodności. Ponadto w trakcie obliczeń wykazano interesującą prawidłowość dla rozkładu normalnego, że zachodzi istotny związek pomiędzy zmianą wartości koncentracji a wynikiem testu zgodności rozkładu: test chi-kwadrat oraz test Kołmogorowa–Lillieforsa.

## 1. Wyniki modelowania rozkładu stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu giełdowego WIG20 – dane tygodniowe

W pracy rozpatrzono wartości kursu zamknięcia, na podstawie danych tygodniowych, indeksu giełdowego WIG20 i spółek, które 30 września 2010 roku znajdowały się w jego składzie. Biorąc pod uwagę fakt, że ostatni dzień września 2010 był czwartkiem, należało odnotować wartości kursu zamknięcia dla kolejnych czwartków – licząc wstecz – z uwzględnieniem świąt. Ze względu na duży nakład pracy przyjęto uproszczoną metodę polegającą na uwzględnieniu co piątej obserwacji danych dziennych, przy czym ostatnia obserwacja danych tygodniowych odnosi się do 30 września 2010 roku. Okres obserwacji brany pod uwagę obejmował lata liczone wstecz od podanej daty, dla których uzyskano pozytywne wyniki testu Kołmogorowa i testu chi-kwadrat w odniesieniu do modelowania rozkładu stóp zwrotu tego indeksu i spółek z wykorzystaniem rozkładu Laplace'a i rozkładu normalnego. Podobnie jak przy danych dziennych, wzrost liczby obserwacji prowadził do pogorszenia wyników testu zgodności rozkładu przejawiającym się wzrostem wartości statystyki testu.

W tabeli 1 zamieszczono wyniki modelowania rozkładu stóp zwrotu (dane tygodniowe) z wykorzystaniem rozkładu Laplace'a i rozkładu Gaussa. Porównując maksymalną liczbę lat prowadzącą do pozytywnego wyniku testu dla rozkładu Gaussa (kolumna czwarta i piąta), stwierdza się, że krytyczny jest test chi-kwadrat, który prowadzi do liczby lat mniejszej lub równej dopuszczalnej liczbie lat wynikającej z testu Kołmogorowa. Wynika stąd wnioski, podobnie jak na podstawie danych dziennych, że wykonując test zgodności rozkładu, można ograniczyć się wyłącznie do testu chi-kwadrat. Dwie ostatnie kolumny tabeli 1 określają maksymalny okres przydatności danego rozkładu do modelowania rozkładu stóp zwrotu. Na 21 rozpatrzonych przypadków 14 razy rozkład Laplace'a prowadził do dłuższego okresu przydatności, w 6 przypadkach uzyskano jednakowe wyniki dla obu rozkładów a tylko w jednym przypadku (KGHM) rozkład Gaussa zapewnił dłuższy okres niż rozkład Laplace'a.

Tabela 1

Zestawienie wyników modelowania rozkładu stóp zwrotu (dane tygodniowe) z wykorzystaniem rozkładu Laplace'a i rozkładu Gaussa

Nazwa spółki	Maksymalna liczba lat prowadząca do pozytywnego wyniku testu				Maksymalna liczba lat	
	rozkład Laplace'a		rozkład Gaussa		rozkład Laplace'a	rozkład Gaussa
	test Kołmogorowa	test chi-kwadrat	test Kołmogorowa	test chi-kwadrat		
ASSECOPOL	12	12	8	7	12	7
BIOTON	0	0	0	0	0	0
BRE	17	17	4	1	17	1
BZWK	16	16	15	13	16	13
CEZ	4	4	4	1	4	1
CYFRPLSAT	2,5	2,5	2,5	1,5	2,5	1,5
GETIN	9	9	6	4	9	4
GTC	6	6	6	6	6	6
KGHM	13	12	13	13	12	13
LOTOS	5	5	5	1	5	1
PBG	6	6	5	2	6	2
PEKAO	6	6	6	1	6	1
PGE*	1	1	1	1	1	1
PGNIG	5	5	5	5	5	5
PKNORLEN	10	10	10	10	10	10
PKO BP	6	6	5	4	6	4
POLIMEXMS	8	8	8	6	8	6
PZU**	20 tyg.	20 tyg.	20 tyg.	20 tyg.	20 tyg.	20 tyg.
TP SA	11	11	4	1	11	1
TVN	6	6	6	5	6	5
WIG20	16	16	10	5	16	5

\* Dane od 6.11.2009 – obejmowały niecały rok.

\*\*Dane od 12.05.2010 – obejmowały maksymalnie 20 tygodni.

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku spółki BIOTON nie uzyskano pozytywnego wyniku testu dla żadnego okresu przydatności. Natomiast w przypadku spółki PGE oraz PZU o wynikach decydował krótki okres obserwacji. W związku z powyższym wymienionych spółek nie uwzględniono w tabeli 2, w której zawarto porównanie wyników modelowania rozkładu stóp zwrotu z wykorzystaniem danych dziennych i danych tygodniowych.

Tabela 2

Porównanie wyników modelowania rozkładu stóp zwrotu z wykorzystaniem danych dziennych i danych tygodniowych

Nazwa spółki	Maksymalna liczba lat			
	rozkład Laplace'a		rozkład Gaussa	
	daneienne	dane tygodniowe	daneienne	dane tygodniowe
ASSECOPOL	2,5	12	0,25	7
BRE	1	17	1	1
BZWK	3	16	0	13
CEZ	3	4	1,5	1
CYFRPLSAT	1,5	2,5	0,75	1,5
GETIN	1	9	1	4
GTC	1,25	6	0,25	6
KGHM	3,25	12	1,5	13
LOTOS	2,25	5	0,5	1
PBG	3	6	0,25	2
PEKAO	2,25	6	1,25	1
PGNIG	4	5	0,75	5
PKNORLEN	2	10	2,25	10
PKO BP	3,5	6	0,75	4
POLIMEXMS	1,5	8	0,5	6
TP SA	2,5	11	0,25	1
TVN	5,5	6	0,5	5
WIG20	9	16	0,75	5
Średnia	2,89	8,75	0,78	4,81

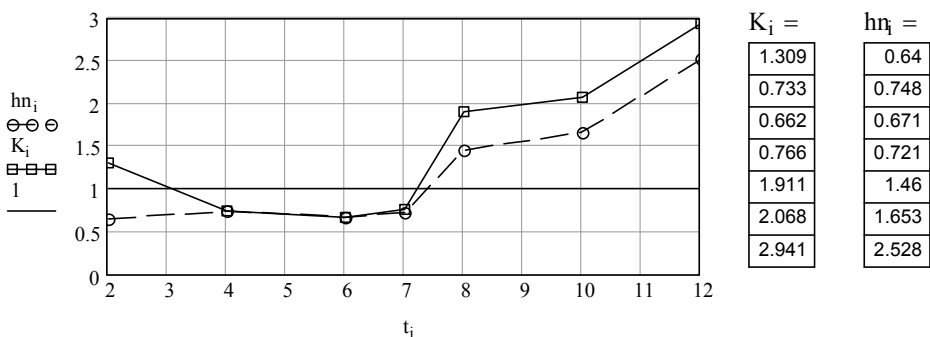
Źródło: opracowanie własne.

W ostatnim wierszu tabeli 2 zamieszczono wartości średnie wyznaczone na podstawie wszystkich danych w kolumnie. Stosunek kolumny 3 do kolumny 2 (ostatni wiersz) wynosi 3,03. Stosunek kolumny 5 do kolumny 4 (ostatni wiersz) wynosi 6,17.

Oznacza to, że wykorzystanie danych tygodniowych powoduje trzykrotny wzrost średniej maksymalnej liczby lat dla rozkładu Laplace'a oraz sześciokrotny wzrost dla rozkładu Gaussa. Wynika stąd, że dane tygodniowe są bardziej przydatne do modelowania rozkładu stóp zwrotu za pomocą rozkładu normalnego niż daneienne. Jednakże dla danych tygodniowych nadal obserwuje się przewagę rozkładu Laplace'a, dla którego średni okres przydatności (8,75 lat) jest 1,8 razy większy niż średni okres przydatności rozkładu Gaussa – 4,81 lat.

## 2. Wpływ zmian wartości koncentracji na wyniki testów zgodności rozkładu

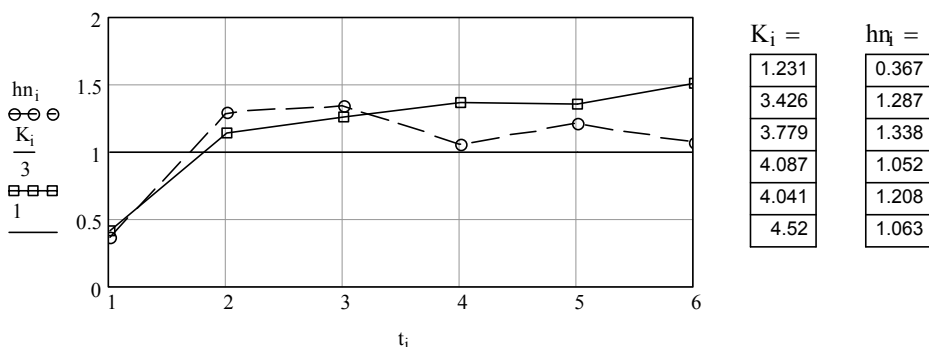
W trakcie wykonywania obliczeń związanych z modelowaniem za pomocą rozkładu normalnego zwrócono uwagę na prawidłowość zachodzącą pomiędzy wynikami testu zgodności rozkładu a wartością koncentracji. Prawidłowość ta zostanie zaprezentowana na kolejnych rysunkach. Na rysunku 1 zamieszczono wartości unormowanej statystyki  $h_i$  testu chi-kwadrat (linia przerywana z kółkami) dla rozkład normalnego oraz wartości koncentracji  $K_i$  (linia ciągła z prostokątami) dla tygodniowych stóp zwrotu spółki ASSECOPOL. Na osi odciętych zaznaczono liczbę ostatnich lat uwzględnionych w procesie modelowania. Przejście z modelu uwzględniającego  $t=7$  lat do modelu dla  $t=8$  lat powoduje wzrost wartości koncentracji z poziomu  $K=0,766$  do  $K=1,911$ . Jednocześnie obserwuje się istotny wzrost wartości unormowanej statystyki testu chi-kwadrat z wartości  $hn=0,721$  do  $hn=1,460$ .



Rysunek 1. Wartości unormowanej statystyki  $hn_i$  testu chi-kwadrat (linia przerywana z kółkami) dla rozkładu normalnego oraz wartości koncentracji  $K_i$  (linia ciągła z prostokątami) – spółka ASSECOPOL

Źródło: opracowanie własne.

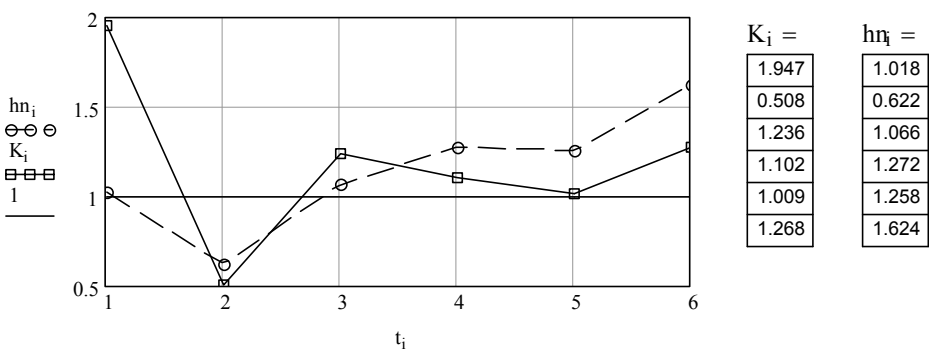
Analogiczną sytuację obserwuje się na rysunku 2 odnoszącym się do tygodniowych stóp zwrotu spółki PEKAO, gdzie zmiana liczby uwzględnionych lat z  $t=1$  do  $t=2$  spowodowała wzrost wartości koncentracji z  $K=1,231$  do  $K=3,426$ . Pociągnęło to za sobą wzrost statystyki testu chi-kwadrat z  $hn=0,367$  do  $hn=1,287$ . W obydwu rozpatrzonych przykładach skokowy wzrost wartości koncentracji spowodował wzrost wartości unormowanej statystyki powyżej liczby 1, co oznacza negatywny wynik testu.



Rysunek 2. Wartości unormowanej statystyki  $hn_i$  testu chi-kwadrat (linia przerywana z kółkami) dla rozkładu normalnego oraz wartości koncentracji  $K_i$  (linia ciągła z prostokątami) – spółka PEKAO

Źródło: opracowanie własne.

Odwrotną sytuację można zaobserwować na rysunku 3 odnoszącym się do tygodniowych stóp zwrotu spółki PBG, gdzie zmiana liczby uwzględnionych lat z  $t=1$  do  $t=2$  powoduje zmniejszenie wartości koncentracji z  $K=1,947$  do  $K=0,508$ . Zmniejszenie wartości koncentracji przyczynia się do zmniejszenia wartości unormowanej statystyki z  $hn=1,018$  do  $hn=0,622$ .



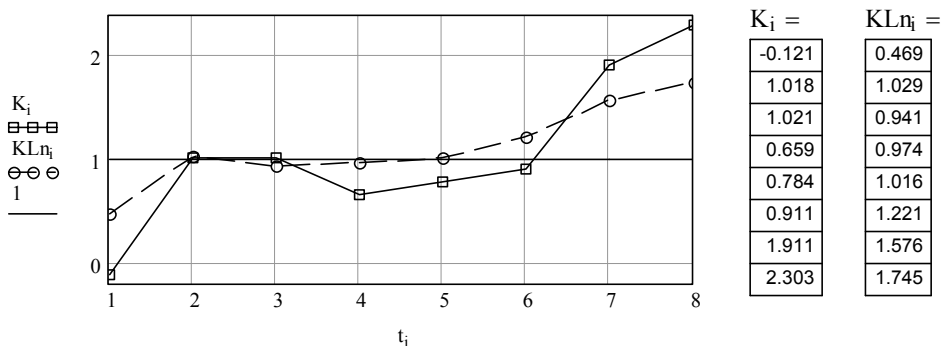
Rysunek 3. Wartości unormowanej statystyki  $hn_i$  testu chi-kwadrat (linia przerywana z kółkami) dla rozkładu normalnego oraz wartości koncentracji  $K_i$  (linia ciągła z prostokątami) – spółka PBG

Źródło: opracowanie własne.



Podobne zachowanie wykazywała wartość unormowanej statystyki testu Kołmogorowa. Ze względu na wcześniejsze uwagi dotyczące małej przydatności tego testu w ocenie zgodności rozkładów zrezygnowano z zamieszczania odpowiednich rysunków.

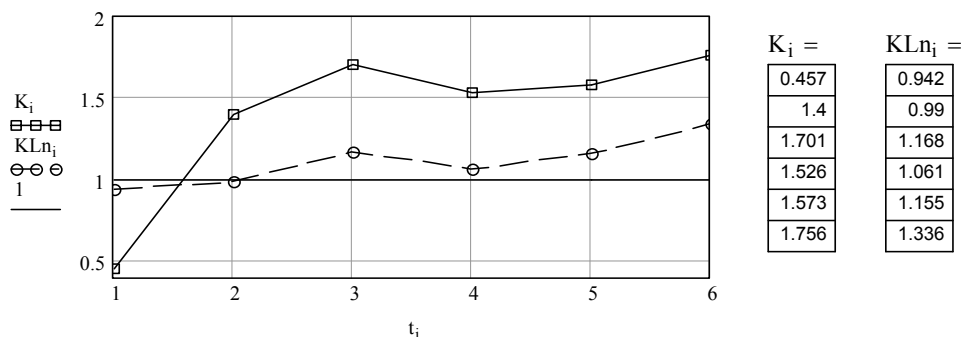
W miejsce tego zostaną zaprezentowane rysunki dotyczące wyników testu zgodności Kołmogorowa–Lillieforsa wykonanego dla modelowania stóp zwrotu z wykorzystaniem rozkładu Gaussa. Należy zauważyć, że wyniki testu Kołmogorowa–Lillieforsa wykazują dużą zbieżność z wynikami testu chi-kwadrat. Na rysunku 4 zamieszczono wartości unormowanej statystyki  $KLn_i$  testu Kołmogorowa–Lillieforsa (linia przerywana z kółkami) dla rozkładu normalnego oraz wartości koncentracji  $K_i$  (linia ciągła z prostokątami) dla tygodniowych stóp zwrotu spółki POLIMEXMS. Przejście z modelu uwzględniającego  $t=1$  rok do modelu dla  $t=2$  lata powoduje wzrost wartości koncentracji z poziomu  $K=-0,121$  do  $K=1,018$ . Jednocześnie obserwuje się wzrost wartości unormowanej statystyki testu z wartości  $KLn=0,469$  do  $KLn=1,029$ , co oznacza negatywny wynik testu.



Rysunek 4. Wartości koncentracji ( $K$  linia ciągła z prostokątami) i unormowanej statystyki testu Kołmogorowa-Lillieforsa ( $KLn$  – linia przerywana z kółkami) używane dla rozkładu Gaussa – spółka POLIMEXMS

Źródło: opracowanie własne.

Podobną sytuację jak na rysunku 4 obserwuje się na rysunku 5, który został sporządzony dla tygodniowych stóp zwrotu spółki TVN.



Rysunek 5. Wartości koncentracji ( $K$  linia ciągła z prostokątami) i unormowanej statystyki testu Kołmogorowa–Lillieforsa ( $KLn$  – linia przerywana z kółkami) uzyskane dla rozkładu Gaussa – spółka TVN

Źródło: opracowanie własne.

Wzrost liczby uwzględnionych lat z  $t=1$  do  $t=3$  powoduje wzrost wartości koncentracji z  $K=0,457$  do  $K=1,701$ , zmieniając wartość unormowanej statystyki testu z  $KLn=0,942$  na  $KLn=1,168$ .

## Wnioski końcowe

W pracy rozpatrzono wykorzystanie rozkładu Laplace’a i rozkładu Gaussa do modelowania rozkładu tygodniowych stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20. Jako jedno z kryteriów przydatności rozkładu do modelowania przyjęto maksymalny okres obserwacji zapewniający pozytywne wyniki testu zgodności. Wyniki obliczeń pozwoliły stwierdzić, że dane tygodniowe poprawiły jakość modelowania w stosunku do danych dziennych wyrażającą się dłuższym okresem przydatności obydwu rozkładów. Ponadto dla danych tygodniowych nadal zaobserwowano przewagę rozkładu Laplace’a, dla którego średni okres przydatności (8,75 lat) jest 1,8 razy większy niż średni okres przydatności rozkładu Gaussa – 4,81 lat.

W trakcie wykonywania obliczeń związanych z modelowaniem za pomocą rozkładu normalnego wykazano interesującą prawidłowość zachodzącą pomiędzy wynikami testu zgodności rozkładu a zmianą wartości koncentracji. Skokowy wzrost wartości koncentracji powodował przekroczenie wartości unormowanej statystyki powyżej liczby 1, co oznaczało negatywny wynik testu. Zaś skokowy

spadek wartości koncentracji przyczyniał się do zmniejszenia wartości unormowanej statystyki, a zatem wpływał na polepszenie wyniku testu zgodności.

## **Literatura**

- Bednarz K. [2012], *Goodness of fit tests in modeling the distribution of the daily rate of return on the WIG20 companies*, Folia Oeconomica Stetinensia 10 (18) 2011/2, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Bołt T.W., Miłobędzki P. [1994], *The Warsaw Stock Exchange in the Period 1991–1993. Qualitative Problems of its Modelling*, „Economics of Planning”, Vol. 27.
- Jajuga K. [2000], *Metody ekonomiczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Kotz S., Kozubowski T., Podgórski K. [2001], *The Laplace distribution and generalizations*, Birkhauser.
- Osińska M. [2006], *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa.
- Piasecki K., Tomasik E. [2011], *Rates of returns of WIG20 index in the situation of extreme tide turning on the Warsaw Stock Exchange*, w: A.S. Barczak, E. Dziwok (red.), *Mathematical, Econometrical and Computer Methods in Finance and Insurance*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Tarczyński W., Mojsiewicz M. [2001], *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa.
- Tarczyński W. [2002], *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, PWE, Warszawa.
- Witkowska D., Kompa K. [2007], *Analiza własności stóp zwrotu akcji wybranych spółek*, w: W. Tarczyński (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.

**MODELLING THE DISTRIBUTION OF WEEKLY RATES OF RETURN  
OF THE WIG20 COMPANIES BY MEANS  
OF THE LAPLACE AND GAUSSIAN DISTRIBUTIONS**

**THE INFLUENCE OF SAMPLE KURTOSIS ON THE RESULT OF GOODNESS  
OF FIT TEST FOR A NORMAL DISTRIBUTION**

**Summary**

In this paper the application of Laplace and Gaussian distributions in modelling the distribution of weekly rates of return of the WIG20 companies was examined. As one of the criteria used for assessing the usefulness of a distribution in modelling, the maximum observation period ensuring positive results of goodness of fit test was accepted. It has been observed that weekly data improved the quality of modelling compared with daily data, which was expressed in terms of the longer period of usefulness for both distributions. Furthermore, the attention was drawn to a curious regularity observed for the normal distribution expressed by an important relation between the change in the value of sample kurtosis and the result of the goodness of fit test.

**Keywords:** rate of return, the Gaussian distribution, Laplace distribution

*Translated by Kamila Bednarz*