

Subiektywne prawdopodobieństwo a model dwumianowy

Jakub Koziński*

Streszczenie: *Cel* – Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie modelu dwumianowego jako narzędzia mogącego służyć do wyceny projektu inwestycyjnego oraz porównanie na podstawie przykładu wyniku jego oceny, jako modelu uwzględniającego dynamikę rynku, w stosunku do tradycyjnego modelu NPV.

Wynik – Wyniki badania nie przejawiały przesłanek do stwierdzenia, że subiektywne określenie prawdopodobieństw powoduje, że niezależnie od czynników obiektywnych wartości oceny w modelu dwumianowym są znacząco zbliżone.

Słowa kluczowe: NPV, model dwumianowy, wycena projektów inwestycyjnych

Wprowadzenie

Celem przedsiębiorstwa działającego w warunkach rynkowych jest maksymalizacja jego wartości bądź zysku, w zależności od przyjmowanej teorii ekonomicznej. Niezbędnym dla przedsiębiorstwa staje się zatem podejmowanie, w trakcie działalności gospodarczej, inwestycji. Prawdłowo podjęta decyzja inwestycyjna powinna opierać się na wcześniej szczegółowo wykonanych kalkulacjach potencjalnych korzyści i kosztów, a także ryzyka (które jest nieodłącznym elementem każdej inwestycji) (Pastusiak 2010: 8) pojawienia się poszczególnych z nich.

Kluczową dla decyzji o rozpoczęciu działań zdaje się być wartość korzyści płynących z podjęcia działań. Najpopularniejszą metodą oceny projektów jest metoda sumy zdyskontowanych przepływów pieniężnych (NPV). W swojej konstrukcji zapewnia uwzględnienie podejmowanego ryzyka w postaci wartości pieniądza w czasie. NPV nie daje jednak informacji, jakie jest prawdopodobieństwo sprawdzenia się zaprognozowanego scenariusza w przyszłości, albo inaczej mówiąc uznaje się, że przedstawiony scenariusz sprawdzi się z prawdopodobieństwem równym 1, co w praktyce gospodarczej nigdy się nie zdarza.

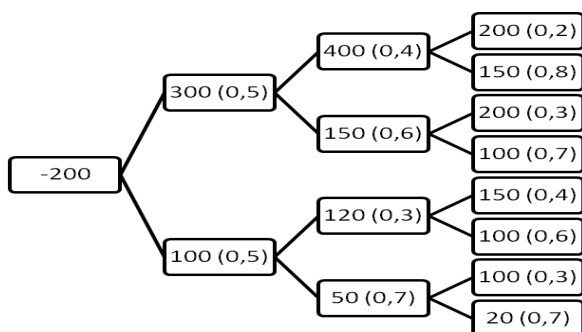
Rozwiązaniem problemu braku przewidzenia różnych wariantów zachowania inwestycji poprzez poznanie możliwych „gałęzi” ruchu przyszłej wartości inwestycji zdaje się być metoda modelu dwumianowego wyceny projektu inwestycyjnego.

* mgr Jakub Koziński, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny Uniwersytetu Łódzkiego, e-mail: jakub.kozinski@uni.lodz.pl.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie modelu dwumianowego jako narzędzia mogącego służyć do wyceny projektu inwestycyjnego oraz porównanie na podstawie przykładu wyniku jego oceny, jako modelu uwzględniającego dynamikę rynku, w stosunku do tradycyjnego modelu NPV.

1. Model dwumianowy w ocenie projektu inwestycyjnego

Model drzewa dwumianowego po raz pierwszy zaproponowany został w 1979 roku przez Johna Coxa, Stephana Rossa i Marka Rubinsteina i był rozwinięciem modelu Sharpe'a z roku 1978 (Ziarkowski 2004: 53). Metoda ta swoją nazwę wzięła od wyglądu siatki obliczeniowej, która przypomina rozszerzające się kolejne gałęzie drzewa, w przypadku którego węzły zawsze rozgałęziają się w dwóch kierunkach. Przykład drzewa decyzyjnego oceny projektu inwestycyjnego przedstawiono na rysunku 1 (wpisane wartości wskazują na przepływy projektu w tys. zł, a wartości w nawiasach na prawdopodobieństwo zdarzenia się tych przepływów).



Rysunek 1. Przykład schematu drzewa decyzyjnego

Źródło: opracowanie własne na podstawie Rogowski (2008).

Punktem wyjścia dla przedstawionego powyżej drzewa decyzyjnego jest punkt „ -200 ”. Przedstawia on moment podjęcia inwestycji i poniesienia nakładów inwestycyjnych. W następnych krokach mamy do czynienia z kolejnymi przepływami pieniężnymi, które pojawiają się w przedsiębiorstwie z przypisanymi do nich prawdopodobieństwami. Model zakłada dualność opcji, jaka może się pojawić. W pierwszym przypadku jest to wariant optymistyczny, którego prawdopodobieństwo wynosi 50%, a wartość przepływu jest wartością oczekiwaną w wariancie pozytywnym (300). Druga gałąź przedstawia pojawienie się z prawdopodobieństwem $(1 - p; 50\%)$ wariant negatywny (100). Powstałe dwie gałęzie rozrastają się następnie wraz z kolejnymi projekcjami.

„W metodzie drzew decyzyjnych przepływy pieniężne generowane w kolejnych latach szacowane są poprzez symulacje lub osąd” (Rogowski 2008). Oznacza to, że bez znajomości rynku i charakterystyki inwestycji nie jest możliwe prawidłowe określenie przyszłych przepływów pieniężnych. Szacowanie to przebiega podobnie, jak w każdym modelu. W tym przypadku jednak wyłącznie przez osąd bądź indywidualne symulacje, określane zostaje prawdopodobieństwo pojawienia się kolejnego przepływu pieniężnego.

Zbudowanie drzewa daje inwestorowi możliwość szybkiej oceny sytuacji projektu, a tym samym określenia już w trakcie trwania inwestycji możliwych do podjęcia działań bez czasochłonnej dodatkowej kalkulacji. Może okazać się, że w połowie trwania projektu inwestor dostrzeże, że znajduje się na „gałęzi”, która w przyszłości może tylko pogłębić jego straty i dzięki temu natychmiast podjęta może zostać decyzja o likwidacji przedsięwzięcia i niepogłębianiu strat.

Kolejnym etapem dla wyceny projektu inwestycyjnego metodą drzew dwumianowych jest zdyskontowanie do wartości bieżącej przewidzianych w projekcji przepływów przyszłych (Rogowski 2008). Należy więc każdą z zaprognozowanych gałęzi potraktować jako indywidualny projekt i obliczyć jego wartość za pomocą wzoru:

$$NPV_k = \sum \frac{CF_i}{(1+r)^i},$$

gdzie:

- NPV_k – wartość bieżąca k -tej projekcji,
- i – numer okresu z przedziału od 0 do n , gdzie n oznacza liczbę przewidzianych przepływów pieniężnych (okresów badania),
- CF_i – przepływ pieniężny w i -tym okresie,
- r – stopa dyskonta.

W ten sposób otrzymuje się k -tą ilość wartości NPV .

Ostatnim z etapów jest obliczenie $E(NPV)$, a więc średniej NPV_k ważonych prawdopodobieństwem. W pierwszej kolejności należy każdą z wartości NPV_k wymnożyć razy prawdopodobieństwa określone na gałęziach, z których jest zbudowana. W ostatnim kroku należy zsumować otrzymane wartości, aby otrzymać wartość końcową (Rogowski 2008).

Otrzymaną w powyższy sposób wartość $E(NPV)$ interpretuje się następująco (Rogowski 2008):

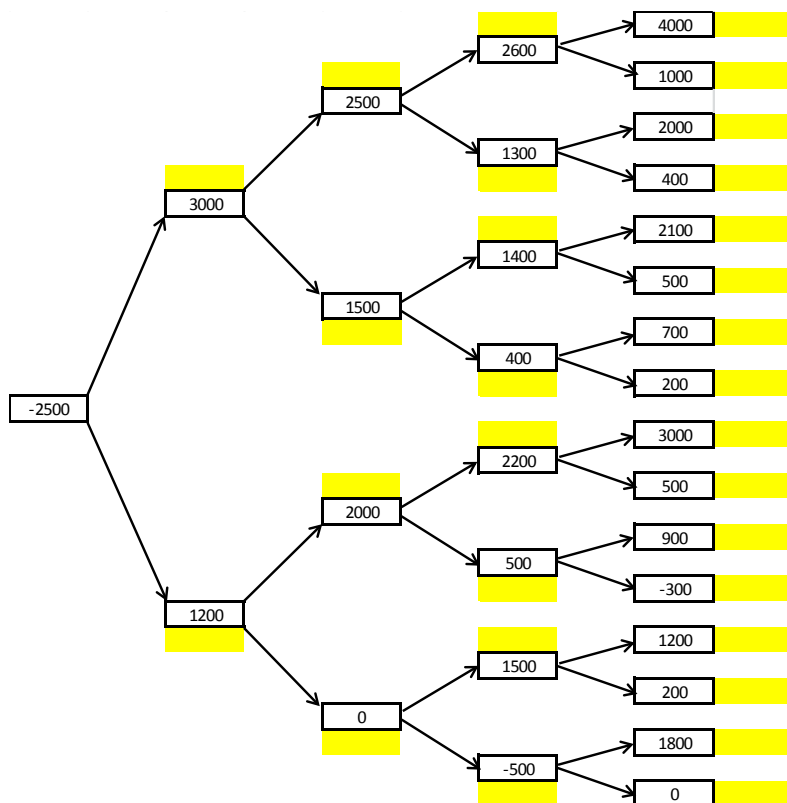
- $E(NPV) > 0$ – przedsięwzięcie jest opłacalne, należy je zaakceptować,
- $E(NPV) = 0$ – przedsięwzięcie to jest neutralne, można je zaakceptować,
- $E(NPV) < 0$ – przedsięwzięcie jest nieopłacalne, należy je odrzucić.

Dla przedstawionego na rysunku 2 drzewa dwumianowego projektu wycena wynosi: $E(NPV) = 163,92$ tys. zł.

2. Przebieg badania oraz hipotezy badawcze

Model dwumianowy, choć zdaje się uzupełniać niedoskonałość prostej metody NPV, opiera się, jak zostało wspomniane wcześniej, w znacznej mierze na indywidualnym osądzie osoby oceniającej projekt. Pozostaje zatem kwestią istotną, czy subiektywna ocena sytuacji firmy, gospodarki czy odczucia dotyczące samego projektu mogą wypaczyć ocenę projektu, a tym samym, czy w takim przypadku możliwa jest rzetelna ocena przy jego wykorzystaniu.

W badaniu wzięło udział 176 studentów trzeciego roku kierunku Finanse i Rachunkowość, którzy pozytywnie ukończyli kurs z finansowej oceny projektów inwestycyjnych, podzielonych następnie na pary jednakowej płci (zarejestrowanych obserwacji w związku z tym wystąpiło 88). Posiadali oni zatem wystarczającą wiedzę, aby podjąć się zadania przedstawionego w założeniach projektu. Autor zdaje sobie sprawę, że grupa badawcza jest grupą niereprezentatywną i wyników badań nie można przenosić na ogół populacji. Samo badanie jednak ma na celu przedstawienie problemu i może być podstawą do kontynuowania tematyki w przyszłości.



Rysunek 2. Schemat drzewa dwumianowego z badania

Źródło: opracowanie własne.

Celem przeprowadzonego badania miało być określenie wpływu samego prawdopodobieństwa na wartość oceny projektu. W związku z powyższym, biorącym udział w badaniu przedstawiona została szczegółowo wykonana analiza sytuacji finansowej, ekonomicznej i biznesowej przedsiębiorstwa, jego powiązań z gospodarką i otoczeniem wraz z interpretacją otrzymanych wyników analiz tak, aby wszyscy badani mieli jednakową wiedzę o przedsiębiorstwie. Określone z góry zostały także stopa dyskontowa oraz wartości wolnych przepływów pieniężnych w ramach przebiegu projektu. Zadaniem uczestników było zatem jedynie określenie prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń. Na rysunku 2 zaprezentowano model, który należało uzupełnić w trakcie badania. Na rysunku pola w ramach przedstawiają wartości przepływów pieniężnych mogących nastąpić w kolejnych latach. Pola szare należało uzupełnić prawdopodobieństwem określonym przez inwestorów. Następnie z danych wyliczone zostały wartości $E(NPV)$ projektów. Uzyskano zatem po 88 obserwacji (87 ważnych) w trzech wariantach.

Badanie przeprowadzone zostało dodatkowo w trzech wariantach. W pierwszym przypadku uczestnicy dowiadywali się, iż gospodarka i prognozy dotyczące sektora, jak i spółki są niepewne. Z najwyższym prawdopodobieństwem według analityków gospodarka jako ogół będzie w stagnacji. Przypadek ten miał być przypadkiem neutralnym. W drugim scenariuszu zapowiadana była głęboka recesja. Trzeci prezentował z bardzo wysokim prawdopodobieństwem bardzo szybki rozwój gospodarczy.

Postawiono następujące hipotezy badawcze:

- hipoteza główna: poprzez subiektywne określanie prawdopodobieństwa w modelu przez inwestora w ramach badanej grupy niezależnie od wariantu wyniki przeciętnie są do siebie podobne, przez co model dwumianowy jest nieefektywny;
- hipotezy pomocnicze:
 - największym rozproszeniem zmiennych (rozumianym jako rozrzut między maksimum a minimum) charakteryzuje się wycena w sytuacji niepewności w stosunku do określonych parametrów kierunkowych gospodarki,
 - wartości NPV w wariantach skrajnych pokrywają się w znacznej ilości w stosunku do liczby obserwacji,
 - różnice między średnimi w poszczególnych wariantach nie są istotne.

3. Wyniki badania

Dla wyników badań określone zostały 3 zmienne: NPV1, NPV2 oraz NPV3. Reprezentują one wartości $E(NPV)$ w kolejnych scenariuszach: neutralnym, pesymistycznym oraz optymistycznym. Określone dla zbiorów statystyki opisowe przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Wybrane statystyki opisowe zmiennych

| Zmienna | Średnia | Mediana | Minimalna | Maksymalna |
|---------|--------------|-----------------|--------------|----------------|
| NPV1 | 2409,580 | 2410,910 | 473,404 | 3575,22 |
| NPV2 | 885,227 | 944,091 | -865,382 | 2643,38 |
| NPV3 | 3634,040 | 3699,360 | 1945,960 | 4919,94 |
| Zmienna | Odch. stand. | Wsp. zmienności | Skośność | Kurtoza |
| NPV1 | 548,017 | 0,227432 | -0,5125710 | 0,915515 |
| NPV2 | 650,718 | 0,735085 | 0,0684083 | 0,204870 |
| NPV3 | 591,242 | 0,162695 | -0,3350330 | 0,314720 |
| Zmienna | Percentyl 5% | Percentyl 95% | Zakres Q3-Q1 | Brakujące obs. |
| NPV1 | 1401,470 | 3257,72 | 629,733 | 0 |
| NPV2 | -190,369 | 2087,52 | 926,835 | 0 |
| NPV3 | 2484,660 | 4640,85 | 729,257 | 0 |

Źródło: opracowanie własne.

Statystyki opisowe wszystkich trzech zmiennych osiągnęły przewidywalne wyniki w zakresie przeciętnych wartości. W zakresie zarówno średniej, jak i mediany najniższą wartością charakteryzuje się wariant drugi (odpowiednio 885,227 oraz 944,091), wartości środkowe osiągnął wariant „neutralny” (2409,58; 2410,91), a najwyższymi wartościami opisać można wariant trzeci (3634,04; 3699,36). Nieco innym rozkładem charakteryzują się jednak wartości różnic pomiędzy maksimum i minimum z obserwacji. Wbrew postawionej hipotezie, największym rozrzutem zmiennych charakteryzuje się wartość NVP2 (3508,75), nieco mniejsze wartości wykazują NPV1 (3101,81) oraz NPV3 (2973,98). Podobnie jest również w przypadku różnic zarówno pomiędzy percentylami 95 oraz 5 i kwartyłem trzecim i pierwszym, które wykluczają wartości skrajne. Największe rozproszenie wartości zmiennych w wariancie drugim potwierdza również najwyższe odchylenie standardowe od średniej. Na rysunku 3 przedstawiano wartości maksymalne i minimalne obserwacji w poszczególnych wariantach.

Analizując rysunek 3 dostrzec można, iż wszystkie obserwacje NPV1 pokrywają się bądź z NPV2, bądź z NPV3, co zdaje się być naturalne i zgodne z przyjętymi założeniami. Dostrzec można również jednak to, że pokrywa się również część wartości z wariantów drugiego i trzeciego. Sugeruje to potwierdzenie jednej z hipotez pomocniczych. Obserwacji takich jest jednak tylko 5 po stronie NPV2 oraz 6 po stronie NPV3, co stanowi odpowiednio tylko 5,7 oraz 6,9% obserwacji.

Dla potwierdzenia, czy grupy te istotnie różnią się od siebie, autor planował dokonać testu na istotność różnic pomiędzy średnimi. Przeprowadzenie wspomnianego testu wymaga jednak spełnienia przez zmienne dwóch warunków: rozkłady w przypadku obu zmiennych muszą być normalne oraz nie ma istotnej różnicy pomiędzy wariancjami obu zmiennych.



Rysunek 3. Wartości minimalne i maksymalne obserwacji

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki testów na normalność rozkładów prezentuje tabela 2.

Tabela 2

Wyniki testów na normalność rozkładów

| Test na normalność rozkładu NPV2: | Test na normalność rozkładu NPV3: |
|--|--|
| Test Doornika-Hansena = 1,07534, z wartością p 0,584107 | Test Doornika-Hansena = 2,25241, z wartością p 0,324262 |
| Test Shapiro-Wilka = 0,990267, z wartością p 0,769083 | Test Shapiro-Wilka = 0,984052, z wartością p 0,362745 |
| Test Lillieforsa = 0,061472, z wartością p ~ 0,57 | Test Lillieforsa = 0,057975, z wartością p ~ 0,66 |
| Test Jarque'a-Bera = 0,220003, z wartością p 0,895833 | Test Jarque'a-Bera = 1,98663, z wartością p 0,370346 |

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki przeprowadzonych testów nie dają podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej jakoby rozkład zmiennej NPV2 oraz NPV3 były zbliżone do rozkładu normalnego. Tabela 3 przedstawia wyniki testu na równość wariancji.

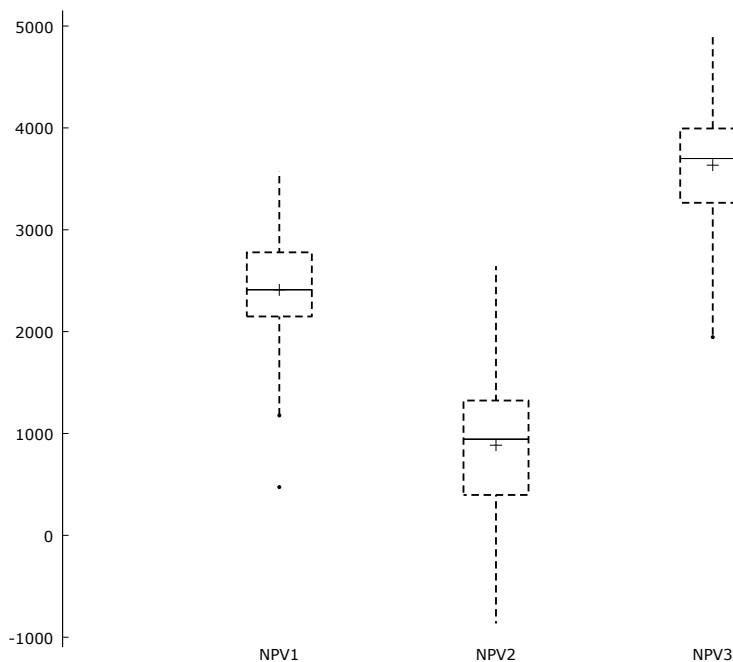
Tabela 3

Wyniki testu na równość wariancji

| Test na równość wariancji |
|---|
| Statystyka testowa: $F(86, 86) = 1,21131$ |
| Dwustronny obszar krytyczny $p = 0,3758$ |
| (jednostronny obszar krytyczny = $0,1879$) |

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki testu Fishera pozwalają odrzucić hipotezę zerową, jakoby wariancje były sobie równe. Z powyższego wynika, że przeprowadzenie testu na równość średnich nie powinno być przeprowadzone. W związku z tym zastosowano metodę graficzną wykresu pudełkowego (rys. 4).

**Rysunek 4.** Wykres pudełkowy wartości zmiennych

Źródło: opracowanie własne.

Wykres na rysunku 4 pozwala potwierdzić wcześniejsze spostrzeżenia, że tylko w przypadku skrajnych wartości wszystkie trzy zmienne, a szczególnie NPV2 i NPV3, pokrywają się.

Podsumowując stwierdzić można, że hipoteza podstawowa nie została potwierdzona. Wyniki badania nie przejawiały przesłanek do stwierdzenia, że subiektywne określenie prawdopodobieństw powoduje, że niezależnie od czynników obiektywnych wartości oceny w modelu dwumianowym są znacząco zbliżone. Niepotwierdzone zostały również hipotezy pomocnicze:

- największym rozproszeniem zmiennych (rozumieniem jako rozrzut między maksimum a minimum) charakteryzuje się wycena w wariancie pesymistycznym,
- wartości NPV w wariantach skrajnych pokrywają się jedynie w kilku procentach, co nie jest wielkością istotną,
- nie można było parametrycznie stwierdzić, czy różnice pomiędzy średnimi w wariantach skrajnych są istotne, jednakże ocena graficzna za pomocą wykresu pudełkowego nie potwierdziła tej hipotezy.

Uwagi końcowe

Przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych niezbędne jest przeprowadzenie oceny projektu. Najpopularniejsza metoda, jaką jest NPV, nie daje jednak możliwości zamknąć w jeden wskaźnik wszystkich prawdopodobnych scenariuszy. Rozwinięciem modelu NPV jest model dwumianowy, który uzupełnia tę niedogodność. Autor postawił jednak hipotezy, zgodnie z którymi subiektywna ocena prawdopodobieństwa pojawienia się scenariuszy przez wyceniającego projekt może znacznie wypaczyć wartość projektu. W badanej grupie nie potwierdzona została żadna z podstawowych hipotez pomocniczych, ani hipoteza podstawowa.

Autor zdaje sobie sprawę, że wyników przeprowadzonego badania nie należy przekładać na szerszą populację ze względu na niereprezentatywność grupy. Przeprowadzone badanie może jednak stanowić podstawę do rozwoju tego kierunku analiz w przyszłości na grupie reprezentatywnej.

Literatura

- Opcje realne w przedsięwzięciach inwestycyjnych* (2008), red. W. Rogowski, Oficyna Wydawnicza SGH w Warszawie, Warszawa.
- Pastusiak R. (2010), *Ocena Efektywności Inwestycji*, CeDeWu, Warszawa.
- Wiśniewski T. (2008), *Ocena efektywności inwestycji rzeczowych ze szczególnym uwzględnieniem ryzyka*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Ziarkowski R. (2004), *Opcje rzeczowe oraz ich zastosowanie w formułowaniu i ocenie projektów inwestycyjnych*, AE w Katowicach, Katowice.

SUBJECTIVE PROBABILITY AND THE BINOMIAL MODEL

Abstract: *Purpose* – The purpose of this article is to present a binomial model as a tool that could be used for the valuation of the investment project and a comparison based on the example of the result of its evaluation, the model takes into account the dynamics of the market, compared to the traditional model of NPV.

Findings – The results of the study did not express evidence to conclude that subjective determination of probabilities that irrespective of the objective factors in assessing the value of the binomial model are remarkably similar.

Keywords: NPV, binomial model, efficiency assessment

Cytowanie

Koziański J. (2014), *Subiektywne prawdopodobieństwo a model dwumianowy*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 804, „Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia” nr 67, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin, s. 305–314; www.wneiz.pl/frfu.