

## Analiza portfeli narożnych z uwzględnieniem skośności

Renata Dudzińska-Baryła\*

Donata Kopańska-Bródka\*\*

Ewa Michalska\*\*\*

**Streszczenie:** Podstawowym problemem w procesie wspomagania decyzji inwestycyjnych jest utworzenie najlepszej kombinacji instrumentów finansowych, która spełnia pożądane warunki. Pomimo że model wyboru optymalnego portfela akcji zaproponowany przez Markowitza ma ogromne znaczenie w teorii finansów i praktyce inwestycyjnej, w świetle przyjmowanych założeń jego zasadność jest kwestionowana. Wielu badaczy wskazuje konieczność jego modyfikacji, ponieważ przyjmowany w modelu kompromis pomiędzy zyskiem i ryzykiem jest niewystarczający. W artykule badane są portfele efektywne ze względu na trzy pierwsze momenty rozkładu stopy zwrotu. W omawianym podejściu optymalna alokacja kapitału w instrumenty finansowe zależy dodatkowo od preferencji inwestora odnośnie do skośności rozkładu mierzonej trzecim momentem centralnym. Analizowane są te portfele (dla wybranej populacji akcji notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie), których podstawowe charakterystyki rozkładu są zgodne z parametrami portfeli narożnych (*corner portfolios*) należących do granicy efektywnej otrzymanej na podstawie modelu dwóch parametrów.

**Słowa kluczowe:** skośność, portfele efektywne, portfele narożne, zmodyfikowany model Markowitza

### Wprowadzenie

Preferencje decydenta dokonującego wyboru w zbiorze losowych wariantów o rozkładach niesymetrycznych mogą być wyrażane poprzez ocenę momentów wyższych rzędów rozkładu prawdopodobieństwa. Obserwacje zachowań osób podejmujących decyzje wskazują, że preferowane są te warianty, którym odpowiadają wyższe wartości momentów rzędu nieparzystego (wartość oczekiwana, skośność) oraz niższe rzędu parzystego (wariancja, kurtoza). Zasady decyzyjne oparte tylko na wartości oczekiwanej i wariancji nie budzą wątpliwości w wyborach ograniczonych do rozkładów symetrycznych, a w szczególności do rozkładów normalnych. Zatem decyzje inwestycyjne dotyczące konstrukcji optymalnego portfela akcji muszą uwzględniać fakt, że rozkłady stóp zwrotu akcji najczęściej są asymetryczne i analiza średnia–wariancja jest niewystarczająca.

\* dr Renata Dudzińska-Baryła, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, e-mail: dudzinska@ue.katowice.pl

\*\* prof. dr hab. Donata Kopańska-Bródka, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, e-mail: broda@ue.katowice.pl

\*\*\* dr Ewa Michalska, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, e-mail: ewa.michalska@ue.katowice.pl

Preferencje decydenta z awersją do ryzyka wyraża funkcja użyteczności o dodatniej trzeciej pochodnej (Scott, Horvath 1980), natomiast w ocenie rozkładów prawdopodobieństwa na podstawie parametrów wyżej oceniane są te z dodatnią skośnością. Preferencja dodatniej skośności to preferencja większego prawdopodobieństwa dużych zysków i ograniczonego prawdopodobieństwa strat. W modelach wyboru portfela trzeci moment centralny przyjmowany jest jako miara skośności.

Rozważania na temat asymetrii rozkładu losowych stóp zwrotu i znaczenia tego faktu dla decyzji inwestycyjnych przedstawiono między innymi w pracach Arditti (1975) oraz Xiong i Idzorek (2011). Z kolei Scott i Horvath (1980) wykazali, że jeśli rozkład losowych stóp zwrotu jest asymetryczny lub funkcja użyteczności inwestora jest funkcją wyższego stopnia niż funkcja kwadratowa, to w ocenie inwestycji należy uwzględnić momenty co najmniej trzeciego i czwartego rzędu. Również w sytuacji, kiedy decyzja inwestycyjna dotyczy skończonego przedziału czasu, jej ocena na podstawie dwóch pierwszych momentów jest niewystarczająca i powinno się uwzględnić momenty wyższych rzędów losowej stopy zwrotu (Samuelson 1970).

Poszerzenie zasady wyboru portfela akcji o trzeci moment centralny czyni problem znacznie bardziej złożony niż w przypadku dwóch pierwszych momentów. W ostatnich latach wiele prac poświęcono metodom i technikom konstrukcji optymalnego portfela akcji z uwzględnieniem kryterium maksymalizacji skośności. Do rozwiązania problemu najczęściej wykorzystywane jest wielomianowe programowanie celowe (Lai 1991; Chunhachinda i in. 1997; Prakash i in. 2003) oraz programowanie rozmyte (Jana i in. 2007).

W analizie decyzji inwestycyjnych zbiorów portfeli tworzących granicę efektywną ma zasadnicze znaczenie. Linia efektywna jest wyznaczana poprzez rozwiązywanie zadań polegających na optymalizacji jednego momentu (kryterium) przy dowolnie określonych wartościach pozostałych momentów. W celu wyznaczenia granicy efektywnej z uwzględnieniem skośności maksymalizowany jest trzeci moment centralny portfela akcji przy dowolnie ustalonych wartościach średniej i wariancji. Granica efektywna jest powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej i jej wyznaczenie stwarza duże trudności numeryczne, ponieważ polega na rozwiązywaniu zadań, które nie są problemami programowania wypukłego. W sytuacji kiedy rozważa się tylko dwa pierwsze momenty, linia efektywna jest krzywą w przestrzeni dwuwymiarowej, a zadanie należy do klasy zadań programowania kwadratowego. W celu wyznaczenia granicy efektywnej wystarczy wyznaczyć portfele narożne (*corner portfolios*). W dalszej części będą analizowane portfele o maksymalnej skośności przy założeniu, że przynajmniej jeden z parametrów jest zgodny z parametrami portfeli narożnych.

## 1. Momenty rzędu pierwszego, drugiego i trzeciego jako charakterystyki portfela akcji

Przyjmijmy, że  $R = [R_1, R_2, \dots, R_N]$  oznacza wektor losowych stóp zwrotu akcji 1, 2, ..., N stanowiących potencjalne składniki portfela, przy czym zakładamy, że oczekiwana wartość  $E[R_i] < \infty$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ponadto  $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ , oznacza wektor udziałów akcji 1, 2, ..., N w portfelu, którego stopa zwrotu  $R_p = R_1x_1 + R_2x_2 + \dots + R_Nx_N$ , przy czym  $x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1$  oraz  $x_i \geq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Wartość oczekiwana losowej stopy zwrotu portfela stanowi moment zwykły rzędu pierwszego i jest wyznaczana na podstawie momentów zwykłych rzędu pierwszego losowych stóp zwrotu poszczególnych akcji. W zapisie macierzowym wartość oczekiwana stopy zwrotu portfela akcji:

$$E(R_p) = x \cdot M_1^T, \tag{1}$$

gdzie macierz  $M_1$  jest macierzą o wymiarach  $(1 \times N)$  (tzn. wektorem wartości oczekiwanych stóp zwrotu poszczególnych akcji) postaci:

$$M_1 = E[R] = [E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_N)]. \tag{2}$$

Zapis oczekiwanej stopy zwrotu portfela za pomocą sumy jest następujący:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N E(R_i) x_i. \tag{3}$$

Z kolei wariancja portfela akcji jest momentem centralnym rzędu drugiego losowej stopy zwrotu portfela i można ją obliczyć, wykorzystując momenty centralne rzędu drugiego losowych stóp zwrotu akcji. Wariancja portfela w zapisie macierzowym ma postać:

$$V_p = E[R_p - E(R_p)]^2 = \mathbf{x} \cdot M_2 \cdot \mathbf{x}^T. \tag{4}$$

Macierz  $M_2$  jest macierzą wariancji–kowariancji o wymiarach  $(N \times N)$  postaci:

$$M_2 = E[(R - E(R)) \cdot (R - E(R))^T], \tag{5}$$

czyli macierzą momentów centralnych rzędu drugiego losowych stóp zwrotu akcji. Zapis wariancji za pomocą sum daje wzór:

$$V_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_i x_j, \tag{6}$$

gdzie  $c_{ij} = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))]$ , dla  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

Jedną z miar skośności rozkładu losowej stopy zwrotu portfela jest jej moment centralny rzędu trzeciego. Moment centralny rzędu trzeciego losowej stopy zwrotu portfela można wyrazić za pomocą momentów centralnych rzędu trzeciego losowych stóp zwrotu akcji. W zapisie macierzowym miarę skośność rozkładu losowej stopy zwrotu portfela wyraża zależność:

$$S_p = E[R_p - E(R_p)]^3 = \mathbf{x} \cdot M_3 \cdot (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{x}^T), \tag{7}$$

gdzie symbol  $\otimes$  oznacza iloczyn Kroneckera. Macierz skośności  $M_1$  jest macierzą o wymiarach  $(N \times N^2)$  postaci

$$M_3 = E[(R - E(R)) \cdot (R - E(R))^T \otimes (R - E(R))^T], \quad (8)$$

a jej elementami są momenty centralne losowych stóp zwrotu akcji.

Miara skośności rozkładu losowej stopy zwrotu portfela przedstawiona przy użyciu sum jest następującą zależnością:

$$S_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N s_{ijk} X_i X_j X_k, \quad (9)$$

gdzie  $s_{ijk} = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))(R_k - E(R_k))]$ , dla  $i, j, k = 1, 2, \dots, N$ .

## 2. Granica efektywna a portfele narożne

Rozwiązania modelu Markowitza, w którym optymalizuje się dwa pierwsze momenty losowej stopy zwrotu, są przedstawiane graficznie w płaszczyźnie ryzyko–dochód, w postaci granicy efektywnej, czyli zbioru portfeli efektywnych. Portfel efektywny to taki portfel, dla którego nie istnieje portfel o takim samym ryzyku i większym zysku ani też portfel o takim samym zysku i mniejszym ryzyku (Haugen 1996). Wyznaczanie zbioru portfeli efektywnych jest uciążliwe, gdyż wymaga rozwiązania wielu zadań optymalizacyjnych o postaci:

$$\begin{aligned} \lambda E(R_p) - V_p^2 &\rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^N x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

przyjmując różne wartości parametru  $\lambda$  z przedziału  $(0; +\infty)$ . Zauważono jednak, że do określenia całej granicy efektywnej wystarczy znajomość podzbioru zbioru portfeli efektywnych złożonego ze wszystkich portfeli narożnych. Kolejne portfele narożne charakteryzują się tym, że ich skład różni się jednym walorem dodawanym lub ujmowanym. Mówimy, że ciąg portfeli efektywnych  $P_1, \dots, P_M$  jest ciągiem kolejnych portfeli narożnych (Kopańska-Bródka red. 2004) wtedy, gdy:

- $\forall_{i < j} [V_{P_i} > V_{P_j} \wedge E(R_{P_i}) > E(R_{P_j})]$  oraz
- jeśli dla dowolnego  $m = 1, 2, \dots, M-1$ , portfele  $P_m$  i  $P_{m+1}$  są kolejnymi sąsiednimi portfelami narożnymi, to skład  $P_{m+1}$  różni się dokładnie jednym walorem dodanym do portfela  $P_m$  lub ujętym, tzn. jeżeli  $I$  jest zbiorem numerów wszystkich walorów,  $I_m$  jest zbiorem numerów walorów w portfelu  $P_m$ , a  $I_{m+1}$  – w portfelu  $P_{m+1}$ , to:

$$\left[ \exists_{d_1 \in (I - I_m)} I_{m+1} = I_m + \{d_1\} \right] \vee \left[ \exists_{d_2 \in I_m} I_{m+1} = I_m - \{d_2\} \right].$$

Algorytm wyznaczania kolejnych portfeli narożnych opiera się na określaniu wartości  $l$ , dla której udział jednego ze składników portfela zmniejszy się do zera, jeżeli wcześniej miał wartość z przedziału otwartego  $(0; +\infty)$ , bądź też osiągnie wartość większą od 0, jeżeli wcześniej miał wartość równą 0. Opis algorytmu można znaleźć w pracach Sharpe'a (2000) i Kopańskiej-Bródki (red. 2004). W wyniku zastosowania wspomnianego algorytmu otrzymuje się zbiór portfeli narożnych  $P_1, \dots, P_M$  oraz odpowiadające im pary charakterystyk  $(V_{P_m}^*, R_{P_m}^*)$  dla  $m = 1, \dots, M$ .

Dysponując zbiorem portfeli narożnych, można określić udziały dowolnego portfela efektywnego jako wypukłej kombinacji liniowej udziałów dwóch sąsiednich portfeli narożnych. Jeżeli udziały dwóch sąsiednich portfeli narożnych  $P_m$  i  $P_{m+1}$  tworzą wektory oznaczone odpowiednio przez  $x_m$  i  $x_{m+1}$ , to udziały portfela efektywnego  $P_E$  leżącego pomiędzy  $P_m$  i  $P_{m+1}$  wyznacza się następująco:

$$x_E = \alpha x_m + (1 - \alpha)x_{m+1}, \quad \alpha \in (0; 1). \quad (11)$$

Ponadto gdy znane są charakterystyki portfeli narożnych, możliwe jest wyznaczenie postaci analitycznych fragmentów funkcji przedstawiającej granicę efektywną w płaszczyźnie ryzyko–dochód, w przedziałach zadanych charakterystykami portfeli narożnych (Kopańska-Bródka red. 2004). Rozważania dotyczące portfeli znajdujących się na granicy efektywnej można zatem ograniczyć do zbioru portfeli narożnych.

### 3. Modele wyboru portfela akcji z uwzględnieniem miary skośności

Włączenie miary skośności w postaci trzeciego momentu centralnego do modeli wyboru portfeli optymalnych rozważano już od lat siedemdziesiątych XX wieku (Simonson 1972; Kane 1982; Barone-Adesi 1985; Lai 1991; Konno i in. 1993). Jednak dopiero wraz z rozwojem narzędzi informatycznych ułatwiających obliczenia numeryczne związane z wyznaczaniem momentów wyższych rzędów nastąpił wzrost liczby publikacji, których autorzy badają znaczenie momentów wyższych losowych stóp zwrotu dla konstruowanych portfeli (Athayde, Flores 2004; Malevergne, Sornette 2005; Guidolin, Timmermann 2008; Li i in. 2010; Kemalbay i in. 2011; Kim i in. 2014; Proelss, Schweizer 2014).

W analizowanych w tej pracy modelach wyboru portfeli, w których jako kryterium optymalizacyjne przyjęto maksymalizację momentu trzeciego losowej stopy zwrotu portfela, uwzględniono wyznaczone wcześniej parametry w postaci wartości charakterystyk portfeli narożnych. Para  $(V_{P_m}^*, R_{P_m}^*)$  stanowi charakterystyki portfela narożnego  $P_m$ , zaś para  $(V_{P_{m+1}}^*, R_{P_{m+1}}^*)$  to charakterystyki portfela o indeksie  $m+1$  czyli portfela  $P_{m+1}$ .

W pierwszym modelu przyjęto ustalony poziom oczekiwanej stopy zwrotu portfela oraz wariancji portfela równe odpowiednio  $R_{P_m}^*$  oraz  $V_{P_m}^*$ .

$$\begin{aligned}
 & S_p \rightarrow \max \\
 & E(R_p) = R_{P_m}^* \\
 \text{Model 1} \quad & V_p = V_{P_m}^* \\
 & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{12}$$

Jako rozwiązanie tego modelu otrzymano (dla wartości charakterystyk odpowiadających portfelom narożnym  $P_m$ , dla  $m = 1, 2, \dots, M$ )  $M$  portfeli o charakterystykach  $(V_{P_m}^*, R_{P_m}^*, S_{P_m}^*)$ . W kolejnym modelu pominięto ograniczenie dotyczące wariancji portfela.

$$\begin{aligned}
 & S_p \rightarrow \max \\
 & E(R_p) = R_{P_m}^* \\
 \text{Model 2} \quad & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{13}$$

W modelu trzecim pominięto warunek dotyczący oczekiwanej wartości stopy zwrotu portfela.

$$\begin{aligned}
 & S_p \rightarrow \max \\
 & V_p = V_{P_m}^* \\
 \text{Model 3} \quad & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{14}$$

W ostatnim z rozważanych modeli określono zakres zmienności oczekiwanej wartości stopy zwrotu portfela oraz wariancji portfela, uwzględniając charakterystyki sąsiednich portfeli narożnych  $P_m$  i  $P_{m+1}$ .

$$\begin{aligned}
 & S_p \rightarrow \max \\
 & R_{P_{m+1}}^* \leq E(R_p) \leq R_{P_m}^* \\
 \text{Model 4} \quad & V_{P_{m+1}}^* \leq V_p \leq V_{P_m}^* \\
 & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{15}$$

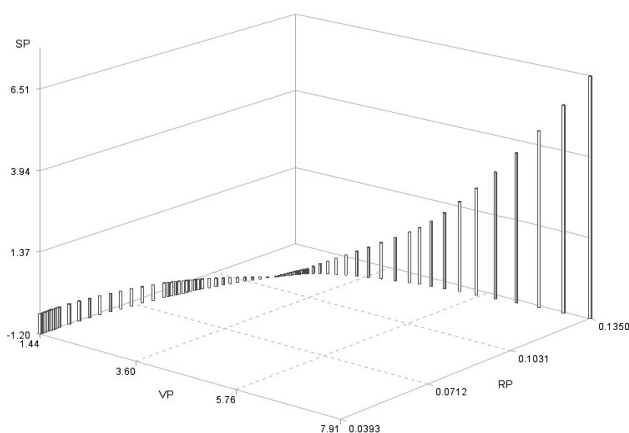
Równoczesne uwzględnienie jako kryteriów wyboru portfela wszystkich trzech momentów jest kłopotliwe, ponieważ wymaga znalezienia rozwiązania kompromisowego przy maksymalizacji wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela oraz maksymalizacji miary skośności przy jednoczesnej minimalizacji wariancji stopy zwrotu portfela. Pewne propozycje modeli wyboru portfela akcji uwzględniających momenty stopnia pierwszego, drugiego

i trzeciego, a nawet czwartego zawierają prace Kemalbaya i in. (2011) oraz Glawischinga i Seidla (2013).

#### 4. Analiza trzech momentów dla zbioru portfeli narożnych

W badaniu nad optymalną alokacją kapitału w instrumenty finansowe z uwzględnieniem preferencji odnośnie do skośności rozkładu mierzonej trzecim momentem centralnym wykorzystano dane dotyczące dziennych stóp zwrotu z okresu 2008–2013 dla 14 akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, stanowiących składniki indeksu WIG20 po rewizji rocznej 21 marca 2014 (pominięto sześć spółek, których pierwsze notowania miały miejsce po 2 lutego 2008). Analizowano zarówno dane z całego okresu od 2008 do 2013 roku, jak i dane pochodzące z poszczególnych lat.

Celem artykułu jest analiza granicy efektywnej i portfeli o parametrach z granicy efektywnej względem skośności mierzonej trzecim momentem centralnym. Dla wszystkich akcji obliczono zatem wartości oczekiwane stóp zwrotu oraz macierze wariancji–kowariancji i trzecie momenty centralne. Następnie dla całego okresu 2008–2013 oraz poszczególnych lat (razem siedem okresów) wyznaczono odpowiednie zbiory portfeli narożnych, które były wystarczające do opisu granicy efektywnej (w sensie modelu Markowitza – model (10)). Otrzymane wartości oczekiwane i wariancje stóp zwrotu portfeli narożnych stanowiły parametry rozwiązywanych w dalszej kolejności modeli (12)–(15) dla wszystkich siedmiu przedziałów czasowych. Wszystkie obliczenia wykonano w pakiecie SAS, wykorzystując solver NLP oraz samodzielnie przygotowane programy.

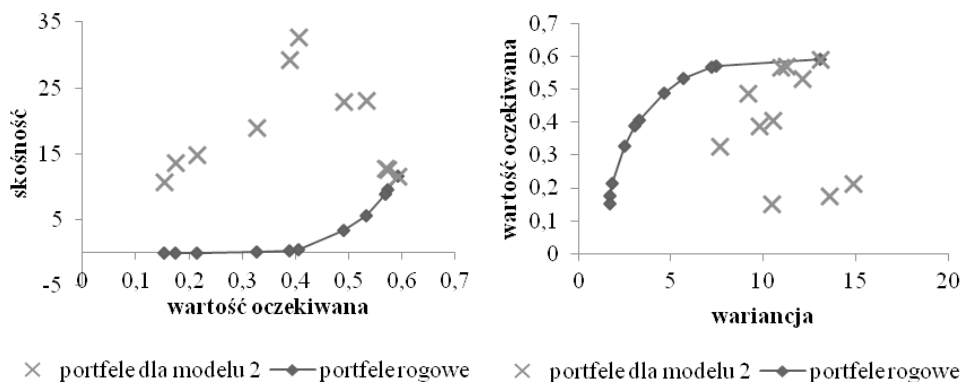


**Rysunek 1.** Skośność portfeli efektywnych (dane z lat 2008–2013)

Źródło: opracowanie własne.

Parametry i struktura portfeli uzyskanych na podstawie modelu 1 pokrywają się z parametrami i strukturą portfeli narożnych, co wynika ze specyfiki ograniczeń modelu. Rozwiązywanie modelu 1 nie jest zatem konieczne – dysponując zbiorem portfeli narożnych, wystarczy obliczyć wartości trzeciego momentu centralnego dla poszczególnych portfeli. Po analizie wartości trzeciego momentu centralnego dla portfeli efektywnych zauważono pewną regularność (rysunek 1), jednak znalezienie postaci analitycznej zaobserwowanych zależności będzie przedmiotem dalszych badań. Podobna regularność była obserwowana również dla portfeli efektywnych wyznaczanych w rocznych przedziałach czasowych.

Portfele o maksymalnej skośności wyznaczone zgodnie z modelem 2 różnią się od portfeli narożnych zarówno składem, jak i wartościami dwóch parametrów, wariancji i skośności (w modelu 2 wartość oczekiwana była przyjmowana na poziomie wartości oczekiwanej portfeli narożnych). Wzrost skośności portfeli optymalnych nastąpił kosztem wzrostu wariancji (rysunek 2). Prezentowany rysunek dotyczy roku 2009, ale te same zależności zaobserwowano we wszystkich badanych okresach.

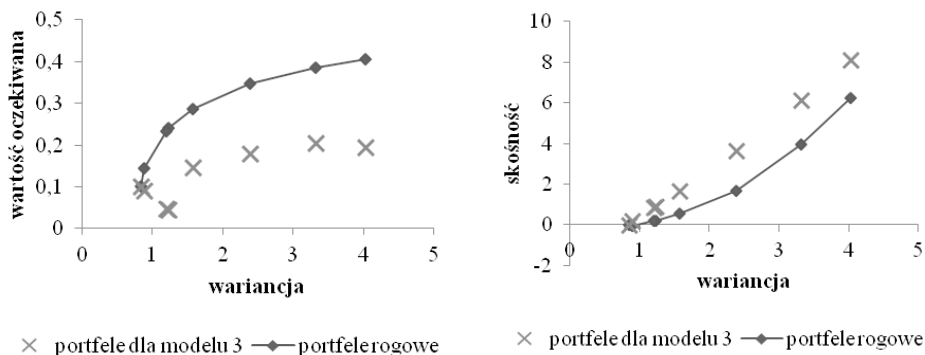


**Rysunek 2.** Charakterystyki portfeli narożnych i portfeli o maksymalnej skośności dla modelu 2 (rok 2009)

Źródło: opracowanie własne.

W modelu 3 przyjęto wartość wariancji na poziomie wariancji kolejnych portfeli narożnych. Portfele optymalne różnią się od portfeli narożnych, a wzrost wartości trzeciego momentu centralnego portfeli optymalnych w stosunku do portfeli narożnych nastąpił kosztem wartości oczekiwanej (rysunek 3).

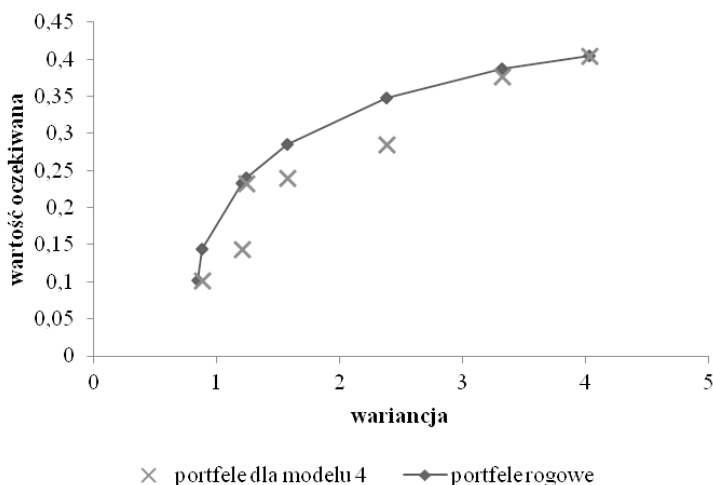




**Rysunek 3.** Charakterystyki portfeli narożnych i portfeli o maksymalnej skośności dla modelu 3 (rok 2010)

Źródło: opracowanie własne.

Portfele optymalne otrzymane na podstawie modelu 4, w którym zakres zmienności oczekiwanej wartości stopy zwrotu oraz wariancji portfela ograniczono wartościami charakterystyk sąsiednich portfeli narożnych  $P_m$  i  $P_{m+1}$ , przyjmują zwykle gorszą z wartości charakterystyk portfeli narożnych  $P_m$  i  $P_{m+1}$  (mniejszą dla wartości oczekiwanej i większą dla wariancji), tzn.  $E(R_p) = R_{P_{m+1}}^*$  oraz  $V_p = V_{P_m}^*$ . Sytuacja taka jest zilustrowana na rysunku 4 pomiędzy portfelami narożnymi  $P_3$  i  $P_4$ . Niekiedy zdarza się jednak, że tylko jedna z charakterystyk przyjmuje gorszą z wartości (rysunek 4, między portfelami  $P_2$  i  $P_3$ ).



**Rysunek 4.** Charakterystyki portfeli narożnych i portfeli o maksymalnej skośności dla modelu 4 (rok 2010)

Źródło: opracowanie własne.

Empiryczna analiza portfeli o maksymalnej skośności, których wybrane charakterystyki odpowiadają charakterystykom portfeli narażonych, prowadzi do wniosku, że wzrost skośności portfela odbywa się kosztem spadku wartości oczekiwanej lub wzrostu wariancji albo pogorszeniem obu tych charakterystyk jednocześnie.

## Uwagi końcowe

W klasycznej teorii Markowitza wyboru portfela akcji podstawowymi charakterystykami służącymi do oceny inwestycji są wartość oczekiwana oraz wariancja losowej stopy zwrotu portfela (Markowitz 1952). Jednak podejście takie wymaga określonych założeń dotyczących rozkładu losowych stóp zwrotu (rozkład normalny) lub postaci funkcji użyteczności inwestora (funkcja kwadratowa), które zwykle nie są spełnione. Przyjmuje się, że modele uwzględniające wyższe momenty rozkładu odnoszą się do dowolnych rozkładów stóp zwrotu i nie podlegają tak ostrej krytyce jak model uwzględniający tylko średnią i wariancję. Jednak modyfikacja dwuparametrycznego modelu Markowitza o dodatkowe kryteria powoduje to, że otrzymywane zadania są złożonymi problemami optymalizacyjnymi. Ponadto uwzględnienie miar skośności zależnych od trzeciego momentu centralnego dodatkowo komplikuje problem, ponieważ miary te, a ściślej – ich estymatory, są bardzo wrażliwe na punkt początkowy i okres, z jakiego pochodzą obserwacje. Mimo tych wszystkich trudności coraz częściej w analizie portfelowej wykorzystywane jest zarówno kryterium maksymalnej dodatniej skośności, jak i minimalnej kurtozy, a poszukiwanie dobrych i efektywnych narzędzi służących wyznaczaniu granicy efektywnej jest w dalszym ciągu problemem otwartym.

## Literatura

- Arditti F.D. (1975), *Skewness and Investor's Decisions: A Reply*, „The Journal of Financial and Quantitative Analysis”, vol. 10, s. 173–176.
- Athayde G., Flores R. (2004), *Finding a Maximum Skewness Portfolio – A General Solution to Three-Moments Portfolio Choice*, „Journal of Economic Dynamics and Control”, vol. 28, s. 1335–1352.
- Barone-Adesi G. (1985), *Arbitrage Equilibrium with Skewed Asset Returns*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis”, vol. 20, s. 299–313.
- Chunhachinda P., Dandapani K., Hamid S., Prakash A.J. (1997), *Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets*, „Journal of Banking and Finance”, vol. 21, s. 143–167.
- Glawisching M., Seidl I. (2013), *Portfolio Optimization with Serially Correlated, Skewed and Fat Tailed Index Returns*, „Central European Journal of Operations Research”, vol. 21, s. 153–176.
- Guidolin M., Timmermann A. (2008), *International Asset Allocation under Regime Switching, Skew, and Kurtosis Preferences*, „Review of Financial Studies”, vol. 21, s. 889–935.
- Haugen R.A. (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa.
- Jana P., Roy T.K., Mazumder S.K. (2007), *Multi-objective Mean-variance-skewness Model for Portfolio Optimization*, „Advanced Modeling and Optimization”, vol. 9, s. 181–193.
- Kane A. (1982), *Skewness Preference and Portfolio Choice*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis”, vol. 17, s. 15–25.

- Kemalbay G., Özkut C.M., Franko C. (2011), *Portfolio Selection with Higher Moments: A Polynomial Goal Programming Approach to ISE-30 Index*, „Ekonometri ve Istatistik Sayı”, 13, s. 41–61.
- Kim W.Ch., Fabozzi F.J., Cheridito P., Fox Ch. (2014), *Controlling Portfolio Skewness and Kurtosis Without Directly Optimizing Third and Fourth Moments*, „Economic Letters”, vol. 122, s. 154–158.
- Konno H., Shirakawa H., Yamazaki H. (1993), *A Mean-absolute Deviation-skewness Portfolio Optimization Model*, „Annals of Operations Research”, vol. 45, s. 205–220.
- Kopańska-Bródka D. (red.) (2004), *Wybrane problemy ilościowej analizy portfeli akcji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
- Lai T. (1991), *Portfolio Selection with Skewness: A Multi-Objective Approach*, „Review of Quantitative Finance and Accounting”, vol. 1, s. 293–305.
- Li X., Qin Z., Kar S. (2010), *Mean-variance-skewness Model for Portfolio Selection with Fuzzy Returns*, „European Journal of Operational Research”, vol. 202, s. 239–247.
- Malevergne Y., Sornette D. (2005), *Higher-Moment Portfolio Theory*, „Journal of Portfolio Management”, vol. 31, s. 49–55.
- Markowitz H. (1952), *Portfolio Selection*, „Journal of Finance”, vol. 7, s. 77–91.
- Prakash A.J., Chang C., Pactwa T. (2003), *Selecting a Portfolio with Skewness: Recent Evidence from US, European, and Latin American Equity Markets*, „Journal of Banking and Finance”, vol. 27, s. 1375–1390.
- Proelss J., Schweizer D. (2014), *Polynomial Goal Programming and the Implicit Higher Moment Preferences of US Institutional Investors in Hedge Funds*, „Financial Markets and Portfolio Management”, vol. 28, s. 1–28.
- Samuelson P. (1970), *Efficient Portfolio Selection for Pareto-Levy Instruments*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis”, vol. 2, s. 107–122.
- Scott R.C., Horvath P.A. (1980), *On the Direction of Preference for Moments of Higher Order Than the Variance*, „Journal of Finance”, vol. 35, s. 915–919.
- Sharpe W.F. (2000), *Macro-Investment Analysis: Optimization. The Critical Line Method*, web.stanford.edu/~wfsarpe/mia/opt/mia\_opt3.htm (3.08.2014).
- Simonson D. (1972), *The Speculative Behavior of Mutual Funds*, „Journal of Finance”, vol. 27, s. 381–391.
- Xiong J.X., Idzorek T.M. (2011), *The Impact of Skewness and Fat Tails on the Asset Allocation Decision*, „Financial Analysts Journal”, vol. 67, s. 23–35.

## ANALYSIS OF SKEWNESS FOR CORNER PORTFOLIOS

**Abstract:** The main aim of the process of investment decision support is to create the best combination of financial instruments, which satisfies the desired conditions. Although the model of optimal portfolio selection proposed by Markowitz is of great importance in the theory of finance and investment practice, in the light of assumptions its legitimacy is questioned. Many researchers have indicated the need to modify it, because the assumed trade-off between return and risk is insufficient. We examine effective portfolios by considering the first three moments of the distribution of returns. In this approach, the optimal allocation of capital also depends on the investor's preferences regarding the skewness measured by the third central moment. Such portfolios are analyzed (for selected population of stocks listed on Warsaw Stock Exchange), whose first two moments of the distribution are consistent with the parameters of corner portfolios belonging to the efficient frontier obtained on the basis of the risk-return model.

**Keywords:** skewness, efficient frontier, corner portfolios, modified Markowitz model

