

STUDIA I PRACE
WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 2

IWONA MARKOWICZ
BEATA STOLORZ
Uniwersytet Szczeciński

ZASTOSOWANIE TESTU GEHANA
DO PORÓWNYWANIA FUNKCJI PRZEŻYCIA FIRM¹

Wstęp

Rozwój metod ilościowych i techniki komputerowej stwarza coraz większe możliwości wykorzystania nowoczesnych i zaawansowanych metod i technik w różnych dyscyplinach naukowych. Przykładem są metody analizy historii zdarzeń, wykorzystywane przez demografów, socjologów, ekonomistów, medyków, biologów, kryminologów i epidemiologów. Tak szerokie zastosowanie sprawia, że nie zostało ujednolicone nazewnictwo, dlatego mówi się o analizie przeżycia (lub dożycia), analizie trwania, analizie przejścia, analizie niezawodności (lub bezawaryjności), analizie czasu niepowodzeń itp. Ogólnie mówiąc, jest to zbiór procedur statystycznych, dla których zmienną losową jest czas między określonymi zdarzeniami bądź czas procesu. Zdarzenie powoduje przejście jednostki z jednego stanu w drugi (np. śmierć osoby, awaria urządzenia, upadek firmy). Okres między stanem początkowym a momentem wystąpienia zdarzenia jest nazywany czasem przeżycia. Wyznaczając prawdopodobieństwo, że jednostka przeżyje kolejne wartości czasu t , określamy funkcję przeżycia. Funkcje takie utworzone dla dwóch lub więcej prób można porównywać.

Celem artykułu jest przedstawienie możliwości wykorzystania testu Gehana (uogólnienia testu Wilcoxona) do porównywania funkcji przeżycia firm. Przy-

¹ Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2006-2008 jako projekt badawczy. Artykuł napisano w ramach projektu numer N11101131/1109.

kładem zmiennej losowej jest czas funkcjonowania firm. Przeprowadzone badania uwzględniają obserwacje ucięte, a więc czas funkcjonowania niektórych firm nie jest znany, gdyż nie zostały one zlikwidowane przed zakończeniem obserwacji.

1. Nieparametryczny test Gehana

Modele nieparametryczne dla zmiennej losowej czasu trwania (czasu przeżycia) są stosowane wtedy, gdy nie jest znana postać analityczna rozkładu. Teoria szacowania wybranych funkcji jest wówczas bardzo złożona i rozbudowana. Historycznie najstarszym modelem nieparametrycznym jest tablica trwania życia². Tradycyjna metoda konstrukcji takich tablic dostarcza nieparametrycznej estymacji funkcji dożycia, funkcji gęstości i wskaźnika hazardu dla określonego przedziału czasu. Jednym z ograniczeń tej metody jest konieczność grupowania czasu obserwacji w przedziały o jednakowej długości³, dlatego do badania czasu trwania zjawiska często stosuje się inne metody. Przykładem jednej z nich jest metoda *Product-Limit-Estimation* Kaplana-Meiera, stosowana głównie do konstrukcji tablic trwania życia. Jest to metoda nieparametryczna, uwzględniająca występowanie obserwacji uciętych, a więc niekompletnych danych. W tym przypadku nie ma konieczności konstrukcji przedziałów dla zmiennej czasowej, lecz jedynie uszeregowanie epizodów według długości czasów trwania. Każdemu punktowi czasu, w którym nastąpiło co najmniej jedno zdarzenie, jest przyporządkowana wartość ryzyka. W roku 1958 E.L. Kaplan i P. Meier zaproponowali sposób estymacji funkcji przeżycia (*survival function*)⁴:

$$\hat{S}(t_i) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right) \quad \text{dla } i = 1, \dots, k \quad (1)$$

gdzie:

t_i – punkt czasu, w którym wystąpiło co najmniej jedno zdarzenie, $t_1 <$

$t_2 < \dots < t_k, t_0 = 0,$

d_i – liczba zdarzeń w czasie $t_i,$

² [5].

³ Por. [4], s. 61–65.

⁴ Por. *ibidem*, s. 65–69.

n_i – liczba jednostek objętych obserwacją w czasie t_i , $n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - z_{i-1}$,
 z_i – liczba obserwacji uciętych w czasie t_i .

Analizowane zbiorowości można dzielić na grupy ze względu na badane cechy i oszacować funkcję przeżycia dla każdej z tych grup oraz zbadać istotność różnic między nimi.

Czasy przeżycia można porównywać w dwóch lub więcej próbach. Ponieważ ich rozkłady są nieznaczące, należy zastosować test nieparametryczny, który jest oparty na porządku rangowym czasów przeżycia. W przypadku dwóch grup można wykorzystać następujące testy: uogólnienie Gehana testu Wilcoxon⁵, test Coxa-Mantela, test F Coxa, test *log-rank* oraz uogólnienie Peto i Peto testu Wilcoxon⁶. Dostępne są również testy do porównywania wielu grup. Nie ma, niestety, powszechnie akceptowanych metod wyboru testu w danej sytuacji. Zależy to bowiem od liczebności prób, występowania danych uciętych i znajomości rozkładu zmiennych⁷. W większości testów obliczone statystyki dla dużej próby asymptotycznie dążą do rozkładu normalnego. Fakt ten jest wykorzystywany do testowania istotności statystycznej różnic między próbami. Większość testów daje rzetelne wyniki tylko przy dużych próbach, a efektywność testów przy małych próbach jest mniej poznana.

Autorki artykułu zastosowały test Gehana dla dwóch prób⁸ do weryfikacji hipotezy o równości funkcji przeżycia: $H_0: S_1(t) = S_2(t)$. Najpierw za pomocą procedury Mantela każdemu czasowi przeżycia przyporządkowuje się punkty, a następnie oblicza się wartość statystyki w oparciu o sumy (dla każdej próby) tych punktów.

Dane są dwie próby: N_1 i N_2 , o liczebnościach odpowiednio n_1 i n_2 , które należy uporządkować łącznie w rosnącej kolejności. Dane można porządkować dwoma sposobami. Najpierw należy ustawić nieucięte obserwacje z obu prób w ciąg od najmniejszej do największej, nadając im kolejne wartości naturalne, a w miejscu obserwacji uciętej wstawić wartość najbliższej kolejnej obserwacji nieuciętej. Następnie powtarzające się obserwacje w dwóch próbach trzeba zredukować do nadanej im mniejszej wartości. W ten sposób powstaje ciąg, które-

⁵ Zob. [6]; [7].

⁶ Por. [10], s. 71–91; [2], s. 123–125.

⁷ Por. [8], s. 425–427.

⁸ Procedurę testowania zaczerpnięto z [10], s. 75.

go wyrazy oznaczono jako R_{1i} . Teraz należy utworzyć drugi ciąg wartości. Kolejno numerowane są wszystkie obserwacje w malejącej kolejności. Następnie w miejscu każdej obserwacji uciętej wstawia się wartość 1. W ten sposób powstaje ciąg wartości, który oznaczono jako R_{2i} . Niech zbiór A jest zbiorem indeksów i , którymi oznaczono dane dotyczące pierwszej próby. Statystykę G oblicza się ze wzoru:

$$G = \frac{w}{\sqrt{v}},$$

gdzie:

$$v = \frac{n_1 n_2 \sum_{i=1}^{n_1+n_2} U_i}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)},$$

$$w = \sum_{i \in A} U_i,$$

$$U_i = R_{1i} - R_{2i}.$$

Otrzymaną wartość porównuje się z wartościami krytycznymi standardowego rozkładu normalnego na przyjętym poziomie istotności.

Opisaną metodę stosuje się do analizy czasu przeżycia lub bezawaryjności, gdy część danych jest ucięta⁹. Można je wykorzystać także w demografii, biologii, naukach społecznych, inżynierii, technice, a szczególnie w medycynie¹⁰, gdzie często traci się kontakt z obserwowanymi pacjentami.

2. Analiza funkcji przeżycia firm w Szczecinie

Badania przeprowadzono w trzech grupach firm zarejestrowanych w krajowym rejestrze urzędowym podmiotów gospodarki narodowej REGON w Urzęd-

⁹ Obserwacje ucięte to obserwacje, dla których nieznan jest dokładny czas przeżycia. Powodem może być niewystąpienie zdarzenia przed ukończeniem badań lub utrata kontaktu z badaną jednostką. W literaturze mówi się również o danych cenzurowanych. Por. [3], s. 203–204.

¹⁰ Por. [1].

dzie Statystycznym w Szczecinie. O przynależności firmy do danej kohorty decydował rok powstania podmiotu gospodarczego. Do analizy przyjęto grupy firm założonych w latach 1990, 1994 i 1997. Na długość czasu funkcjonowania firm wpłynęło wiele czynników, między innymi warunki gospodarcze, w jakich podmiot rozpoczynał działalność, które z pewnością były różne dla omawianych grup. Jednym z elementów, który należy wziąć pod uwagę, jest konkurencja na danym rynku. O jej wielkości może świadczyć liczba istniejących podmiotów. Na koniec roku (1989) poprzedzającego powstanie firm grupy pierwszej zarejestrowanych było 1205 podmiotów gospodarczych, Wielkość ta dla drugiej grupy wynosiła już ponad 33 grupy trzeciej – ponad 43 tys. Wielkości te świadczą o niejednorodności warunków funkcjonowania badanych grup firm.

Obserwację trzech grup zakończono w 2000 roku, zatem okresy obserwacji są niejednakowe. Maksymalny czas obserwacji wynosił do 132 miesięcy dla pierwszej grupy (firmy założone w 1990 roku), do 84 miesięcy dla drugiej grupy (firmy założone w 1994 roku) i do 48 miesięcy dla trzeciej grupy (firmy założone w 1997 roku). Firma, która nie została zlikwidowana w wymienionych okresach była uznawana za obserwację uciętą. Charakterystykę ilościową badanych grup przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Liczebność badanych grup z podziałem na obserwacje nieucięte i ucięte

Lata	Obserwacje nieucięte		Obserwacje ucięte		Liczebność grupy <i>N</i>
	liczba	odsetek	liczba	odsetek	
1990	1641	37,30	2758	62,70	4399
1994	2007	40,35	2967	59,65	4974
1997	2291	29,15	5568	70,85	7859

Źródło: obliczenia własne.

Jak wspomniano, punktem wyjścia w przeprowadzonej analizie było wyznaczenie funkcji przeżycia Kaplana-Meiera. Następnie przy zastosowaniu testu Gehana zweryfikowano hipotezę o jednakowych funkcjach przeżycia firm z analizowanych grup. Test ten przeprowadzono najpierw dla trzech grup, a następnie dla poszczególnych par grup; wyniki przedstawiono w tabeli 2. Wartość statystyki testu dla trzech grup wskazuje na istotność różnic między nimi. Potwierdza to również histogram sum punktów dla grup firm, obliczonych według pro-

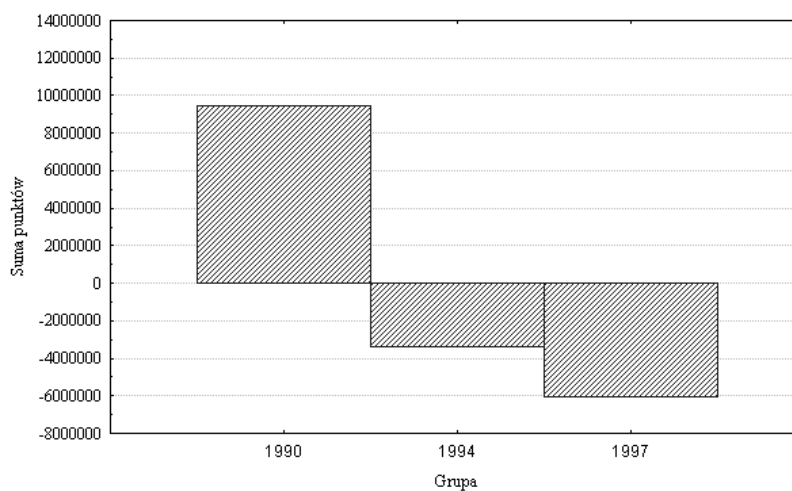
cedury Mantela (rysunek 1). Wyraźną różnicę można zauważyć między grupą firm z 1990 roku a pozostałymi grupami. Wartości testów dla poszczególnych par jednoznacznie wskazują na istotną różnicę między czasami przeżycia dla firm z lat 1990 i 1994 oraz 1990 i 1997. Porównując grupy firm z lat 1994 i 1997, czasy przeżycia można uznać za różne dopiero na poziomie istotności 0,10946. Zakładając najczęściej przyjmowany poziom $\alpha = 0,05$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednakowych funkcjach przeżycia.

Tabela 2

Wyniki testu Gehana

Grupy (rok powstania firm dla porównywanych grup)	Wynik testu Gehana	Prawdopodobieństwo, przy którym różnice są istotne
1990, 1994, 1997	451,0314	0,00000
1990, 1994	17,67692	0,00000
1990, 1997	19,66488	0,00000
1994, 1997	1,600630	0,10946

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.



Rys. 1. Histogram sumy punktów dla każdej grupy firm (założonych w Szczecinie w latach 1994 i 1997), obliczone według procedury Mantela, wykorzystanej do obliczenia statystyki testu Gehana

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.

Porównanie prawdopodobieństw przeżycia dla poszczególnych par spośród trzech badanych grup firm zaprezentowano w tabelach 3–5 i na rysunkach 2–4 (N – liczebność).

Tabela 3

Tablice przeżycia, przy zastosowaniu estymatora Kaplana-Meiera dla firm powstałych w Szczecinie w latach 1990 i 1994

Dolna granica	N wchodzących		N uciętych		N zlikwidowanych		Procent przeżywających		Skumulowany procent przeżywających	
	1990	1994	1990	1994	1990	1994	1990	1994	1990	1994
0,0000	4399	4974	0	0	398	630	90,95249	87,33414	100,0000	100,0000
14,5556	4001	4344	0	0	107	506	97,32567	88,35175	90,9525	87,3341
29,1111	3894	3838	0	0	117	425	96,99538	88,92652	88,5201	77,1612
43,6666	3777	3413	0	0	214	269	94,33412	92,11837	85,8604	68,6168
58,2222	3563	3144	0	275	138	123	96,12686	95,90886	80,9957	63,2087
72,7778	3425	2746	0	2692	225	54	93,43066	96,14286	77,8586	60,6227
87,3334	3200	0	0	0	227	0	92,90625	0,00000	72,7438	58,2844
101,8889	2973	0	0	0	113	0	96,19913	0,00000	67,5835	0,0000
116,4445	2860	0	2758	0	102	0	93,11276	0,00000	65,0148	0,0000
131,0000	0	0	0	0	0	0	0,00000	0,00000	60,5371	0,0000

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.

Tabela 4

Tablice przeżycia, przy zastosowaniu estymatora Kaplana-Meiera dla firm powstałych w Szczecinie w latach 1990 i 1997

Dolna granica	N wchodzących		N uciętych		N zlikwidowanych		Procent przeżywających		Skumulowany procent przeżywających	
	1990	1997	1990	1997	1990	1997	1990	1997	1990	1997
0,0000	4399	7859	0	0	398	1406	90,95249	82,10968	100,0000	100,0000
14,5556	4001	6453	0	0	107	590	97,32567	90,85696	90,9525	82,1097
29,1111	3894	5863	0	3515	117	272	96,99538	93,37474	88,5201	74,6024
43,6666	3777	2076	0	2053	214	23	94,33412	97,80848	85,8604	69,6598
58,2222	3563	0	0	0	138	0	96,12686	0,00000	80,9957	68,1332
72,7778	3425	0	0	0	225	0	93,43066	0,00000	77,8586	0,0000
87,3334	3200	0	0	0	227	0	92,90625	0,00000	72,7438	0,0000
101,8889	2973	0	0	0	113	0	96,19913	0,00000	67,5835	0,0000
116,4445	2860	0	2758	0	102	0	93,11276	0,00000	65,0148	0,0000
131,0000	0	0	0	0	0	0	0,00000	0,00000	60,5371	0,0000

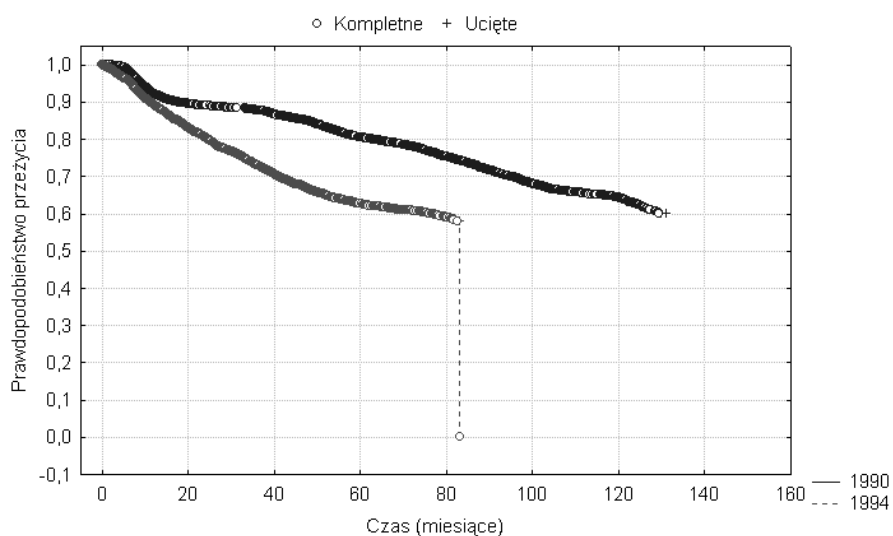
Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.

Tabela 5

Tablice przeżycia, przy zastosowaniu estymatora Kaplana-Meiera dla firm powstałych w Szczecinie w latach 1994 i 1997

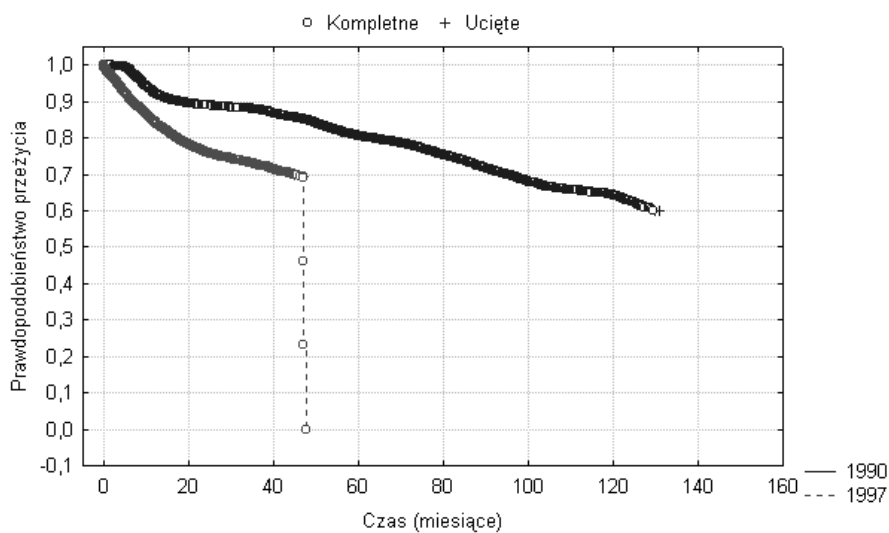
Dolna granica	N wchodzących		N uciętych		N zlikwidowanych		Procent przeżywających		Skumulowany procent przeżywających	
	1994	1997	1994	1997	1994	1997	1994	1997	1994	1997
0,0000	4974	7859	0	0	405	996	91,85766	87,32664	100,0000	100,0000
9,2259	4569	6863	0	0	368	645	91,94572	90,60178	91,8577	87,3266
18,4519	4201	6218	0	0	335	332	92,02571	94,66066	84,4592	79,1195
27,6778	3866	5886	0	398	256	190	93,37817	96,65905	77,7242	74,8950
36,9037	3610	5298	0	4606	243	121	93,26870	95,95993	72,5774	72,3928
46,1296	3367	571	0	564	187	7	94,44609	97,57785	67,6920	69,4681
55,3555	3180	0	0	0	101	0	96,82390	0,00000	63,9324	67,7855
64,5815	3079	0	534	0	63	0	97,75961	0,00000	61,9019	0,0000
73,8074	2482	0	2433	0	48	0	96,20703	0,00000	60,5150	0,0000
83,0333	1	0	0	0	1	0	0,00000	0,00000	58,2197	0,0000

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.



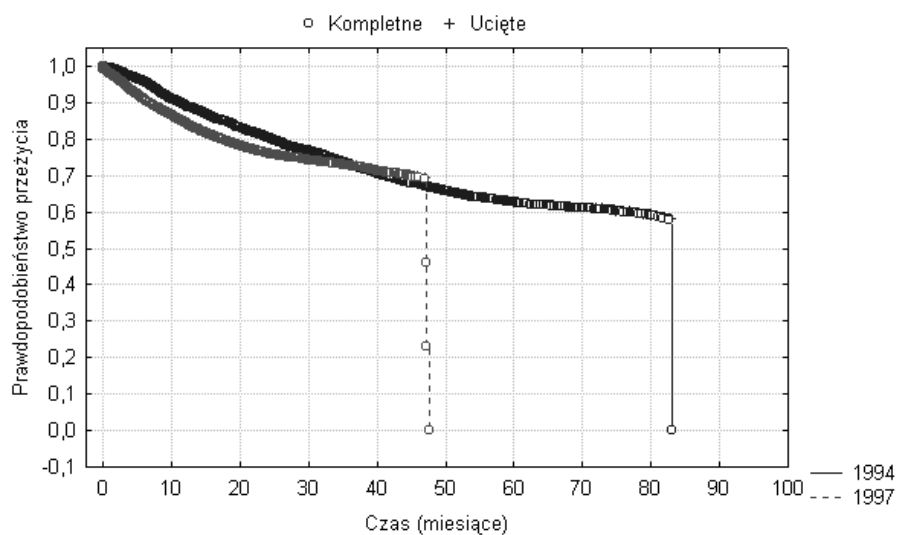
Rys. 2. Prawdopodobieństwo przeżycia Kaplana-Meiera dla firm założonych w Szczecinie w latach 1990 i 1994

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.



Rys. 3. Prawdopodobieństwo przeżycia Kaplana-Meiera dla firm założonych w Szczecinie w latach 1990 i 1997

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.



Rys. 4. Prawdopodobieństwo przeżycia Kaplana-Meiera dla firm założonych w Szczecinie w latach 1994 i 1997

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu *Statistica*.

Podsumowanie

Podsumowując, wśród badanych grup wyróżnia się grupa firm zarejestrowanych w Szczecinie w 1990 roku. Spadek skumulowanego prawdopodobieństwa przeżycia tych podmiotów gospodarczych był wolniejszy niż podmiotów powstałych w latach 1994 i 1997. Z pewnością utrzymanie się firmy na szczecińskim rynku było łatwiejsze w pierwszych latach 90. ubiegłego wieku ze względu na małą konkurencję. Przedstawione na rysunku 4 prawdopodobieństwa przeżycia firm założonych w latach 1994 i 1997 wskazywały na podobieństwo zmian w czasie. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy o statystycznej równości funkcji przeżycia potwierdził zastosowany test Gehana.

Literatura

1. *Badania statystyczne w ubezpieczeniach*. Red. J. Hozer. Wyd. Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002.
2. Cox D.R., Oakes D.: *Analysis of survival data*. Chapman and Hall, London 1984.
3. Domański C., Pruska K.: *Nieklasyczne metody statystyczne*. PWE, Warszawa 2000.
4. Frątczak E., Gach-Ciepiela U., Babiker H.: *Analiza historii zdarzeń. Elementy teorii, wybrane przykłady zastosowań*. SGH, Warszawa 2005.
5. Frątczak E., Józwiak J., Paszek B.: *Zastosowania analizy historii zdarzeń w demografii*. SGH, Warszawa 1996.
6. Gehan E.A.: *A generalized Wilcoxon test for comparing arbitrary single-censored samples*. „Biometrika” 1965, No 52.
7. Gehan E.A.: *A generalized two-sample Wilcoxon test for double-censored data*. „Biometrika” 1965, No 52.
8. Lawless J.F.: *Statistical models and methods for lifetime data*. John Wiley & Sons, New York 1982.
9. Markowicz I., Stolorz B.: *Wykorzystanie analizy historii zdarzeń do konstrukcji tabeli żywotności firm*. „Wiadomości Statystyczne” 2006, nr 4.
10. Namboodiri K., Suchindran C.M.: *Life table techniques and their applications*. Academic Press Inc., New York 1987.

**APPLICATION OF THE GEHAN TEST
FOR COMPARISON OF FIRMS SURVIVAL FUNCTIONS**

Summary

The aim of the paper is to present the possibility of Gehan test (Gehan's generalization of Wilcoxon test) application for the comparison of survival functions. Firm's existence time is the example of random variable. Studies carried out include censored observations, thus time of some firms existence is unknown because they were still operating at the completion of research. Analyses were carried out in three groups of firms registered in the National Register of Economic Entities REGON in the Statistical Office in Szczecin. The year of the origin of economic entity decided on firm's membership in the specific cohort. Groups of firms established in the years 1990, 1994 and 1997 were analyzed and the observation was completed in year 2000.

Translated by Janusz Stolorz